

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

39. Band, Heft 6/9

1. Oktober 1951

S. 241—432

Geschichte.

Sarton, George: *Decimal systems early and late*. Osiris, Bruges 9, 581—601 (1950).

Überblick über die Entwicklung des dezimalen Gedankens beim Aufbau der Zahlen-, Ziffern- und Maßsysteme, über den Anteil, den die verschiedenen Völker hierzu geleistet haben und über die Irr- und Umwege, die man dabei ging. — Die einzelnen Abschnitte behandeln: I. Dezimale Zählung (bes. Ägypten, China, Indien, Rom). — II. Prinzip der Position. Der Ruhm dieser wunderbaren Erfindung gebührt ohne Zweifel den Indern. Sie wurde aber doch durch das babylonische Pseudopositionssystem vorbereitet, das zwar keine Null (und kein Komma) kennt, das aber auch für die Brüche verwendet wurde, für die es die Inder noch nicht gebrauchten. — III. Dezimalbrüche. Die Chinesen hatten für die dezimal fortschreitenden Brüche eigene Symbole bis 10^{-10} . Erst bei S. Stevin sind die Dezimalbrüche vollständig entwickelt. — IV. Nichtdezimale Systeme. Verf. behandelt das Zweiersystem (Chinesen, Leibniz und bei den modernen Elektronen-Rechenmaschinen), das Achtersystem und das Zwölfersystem. Er wendet sich schärfstens gegen moderne Bestrebungen, das letztere wieder einzuführen. Es gibt in Amerika eine „Duodecimal Society“, die eine Zeitschrift, Tabellen und andere Veröffentlichungen herausgibt! — V. Dezimale Maßsysteme. — VI. Schlußbemerkungen. Hier wird eindringlich gefordert, daß auch die englisch sprechenden Nationen das metrische System endlich annehmen. Dies wäre — neben der Wahl des Englischen als zweite Sprache für alle andern Völker — ein wichtiger Schritt auf dem Weg zur Einheit der Menschheit, um die der Verf. — trotz aller Rückschläge — seit Jahren mit allen Mitteln des Geistes und des Herzens kämpft.

Kurt Vogel.

• Lejeune, Albert: *Euclide et Ptolémée. Deux stades de l'optique géométrique grecque*. (Recueil de travaux d'histoire et de philologie, III. S., fasc. 31.) Louvain: Bibliothèque de l'Université de Louvain 1948. 196 p.

Von den griechischen Abhandlungen über Optik ist die des Ptolemaios die bedeutendste. Sie besteht aus 5 Büchern, von denen sich nur das 2.—4. und ein Teil des 5. Buches in einer aus dem 12. Jhdt. stammenden lateinischen Übersetzung nach zwei arabischen Handschriften erhalten haben. Im Anschluß an die Ausgabe von G. Govi (1885) hat bisher nur das Kapitel über die Strahlenbrechung nähere Würdigung erfahren. — In der vorliegenden vorzüglich belegten Arbeit untersucht der Verf. eingehend den Inhalt der eigentlichen Optik, wobei es ihm gelingt, wichtige Teile des verlorenen ersten Buches — auch über den Umfang der von Ptolemaios am Anfang des 2. Buches gegebenen Zusammenfassung hinaus — inhaltlich festzustellen. Gegenüber der Optik bei Euklid zeigen sich bei Ptolemaios grundlegende Unterschiede. Jener berücksichtigt nur die linearperspektivische Seite des Sehvorgangs, wobei er — auf Voraussetzungen aufbauend — more geometrico deduktiv vorgeht. Physikalische oder psychologische Betrachtungen und Beobachtungen liegen ihm fern. Ganz anders ist es bei Ptolemaios, der, über das Geometrische hinausgehend, als Vorbedingung für das Sehen die Faktoren des Lichts und der Farbe annimmt. Er führt die Achse des Strahlenkegels ein, betrachtet nicht nur die Entfernung sondern auch die Ausdehnung, Form und Bewegung des Objekts und untersucht die Minimalbedingungen für die Sichtbarkeit. Vollkommen neu sind die durch zahlreiche Experimente gestützten Untersuchungen über das Sehen

mit beiden Augen sowie seine Ansichten über die Beziehungen zwischen Licht und Sehen, wobei ihm deren Identität vorschwebt. Hätte er hier die entscheidenden Folgerungen gezogen, dann wäre er dem 700 Jahre jüngeren Alhazen zuvorgekommen, der erkennt, daß die vom Objekt ausgehenden Lichtstrahlen das Bild im Auge hervorrufen. — So sieht man also bei Ptolemaios etwas grundsätzlich Neues: Die Optik ist nicht mehr nur ein Zweig der angewandten Mathematik, sie ist zur Physik geworden, die durch Beobachtung, Experimentieren und Messen zu ihren Ergebnissen gelangt. — Der zweite noch ungedruckte Teil der schönen Dissertation wird die Katoptrik bei Ptolemaios, also Reflektion und Refraktion, behandeln und einen Überblick über die Geschichte der griechischen Katoptrik geben. Möge er bald zur Veröffentlichung kommen. *Kurt Vogel.*

Cchakaja, D. G.: Die Arithmetik und Algebra der Grusinier und der Völker des nahen Ostens in der grusinischen Überlieferung der astronomischen Literatur. Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 315—339 und russische Zusammenfassg. 340 (1949) [Grusinisch].

Auf Grund von Handschriften des Grusinischen Museums wird festgestellt, daß die grusinischen Astronomen des 11. bis 13. Jahrhunderts die Rechenmethoden der Astronomen des Nahen Ostens angewandt haben. Zugleich wird die grusinische Regel für die Phasenbestimmung des Mondes dargestellt und erklärt; die Genauigkeit der mit ihrer Hilfe erhaltenen Resultate wird durch Vergleich mit den Daten der damaligen Astronomie deutlich gemacht. In der Arbeit werden ferner Schlüsse über die Abmessungen der Himmelskörper, die sich in den Handschriften finden, betrachtet; ein Teil davon ist den Schlüssen, die in gleichzeitigen astronomischen Arbeiten vorkommen, ziemlich nahe verwandt. (Autoreferat.)

• **Thorndike, Lynn:** The sphere of Sacrobosco and its commentators. Chicago: University of Chicago Press 1949. X, 496 p. \$ 10,—.

Die „Sphaera“ Sacroboscus (1. Hälfte des 13. Jhdts.) war das unverwüstliche Standardwerk, nach dem auf den scholastischen und humanistischen Universitäten die Astronomie als Teil des Quadriviums „gelesen“ wurde. Dem entspricht auch die Zahl der Hs. und Druckausgaben (von 1472—1656, darunter etwa 30 Inkunabeln), zu denen noch zahlreiche Kommentare und Übersetzungen kommen. Wegen der großen Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft und des Unterrichts ist die vorliegende kritische Neuausgabe aus der Feder eines Kenners mittelalterlicher Kultur dankbarst zu begrüßen. Sie enthält: 1. den lat. Text (Kap. II, 76—117) nebst englischer Übersetzung (III, 118—142) der Sphaera nach Hs. des 13.—15. Jhdts., leider ohne die erklärenden Zeichnungen im Text, 2. den bisher ungedruckten lat. Text (IV, 143—198) und eine engl. Übersetzung (V, 199—246) des ausführlichen Kommentars von Robertus Anglicus. — 3. den lat. Text (VI, 247—342) des Michael Scot zugeschriebenen Kommentars hauptsächlich nach den Ausgaben von 1495 und 1531. — 4. den lat. Text (VII, 343—411) des Kommentars von Cecco d'Ascoli nach den Ausgaben von 1499 und 1518 und der einzigen bekannten Hs. aus dem 15. Jhd. — 5. den lat. Text bisher noch unedierter Randglossen eines anonymen Verfassers auf zwei Hs. des 13. Jhdts. (VIII, 412—444). — 6. lateinische Textauszüge einer Reihe von bisher ungedruckten, meist anonymen Kommentaren; einer davon stammt von Joh. Peckham, der an Sacrobosco mancherlei Kritik übt (5 Appendices S. 445—480). — In der ausführlichen Einleitung (I, 1—75) nimmt Verf. Stellung zu all dem, was über das Leben und die zahlreichen anderen Schriften Sacroboscus bekannt ist, wobei den Quellen, aus denen dieser schöpfte und den Beziehungen zu gleichzeitigen astronomischen Schriftstellern nachgegangen wird. Hierbei wendet sich Verf. gegen die Auffassung, daß Sacrobosco den Arabern al-Farghani und al-Battani „sklavisch“ gefolgt sei. Bei der Betrachtung des bis ins 17. Jhd. reichenden Einflusses der Sphaera auf den mittelalterlichen Unterricht wird u. a. auch auf Fragen des damaligen Universitäts-

betriebes (z. B. Dauer der Vorlesungen) eingegangen. Weiterhin werden die Kommentatoren und die überlieferten Handschriften eingehend besprochen. Einige nützliche Register beschließen das in der Ausstattung vorzügliche, für die Geistesgeschichte des Mittelalters ungemein wertvolle Quellenwerk.

Kurt Vogel.

Agostini, Amedeo: Il metodo delle tangenti fondato sopra la dottrina dei moti nelle opere di Torricelli. Periodico Mat., IV. S. 28, 141—158 (1950).

Verf. belegt die heute von keinem ernstzunehmenden Fachmann mehr in Frage gestellte selbständige Entdeckung der mechanischen Tangentenregel durch Torricelli gegenüber den anderslautenden Behauptungen Robervals und Pascals unter Bezugnahme auf die einschlägigen Texte in den Opere (Faenza 1919): (1) Tangente an die Archimedische Spirale (1641), (2) Tangente an die gemeine Zykloide und Normalenkonstruktion aus dem Momentanpol (1643), (3) Tangente an die verlängerte und verkürzte Zykloide (1644), (4) Tangente an die höheren Parabeln und Spiralen (1645).

Josef E. Hofmann.

Dorwart, H. L.: An early american unpublished work in mathematics. Scripta math., New York 16, 181—185 (1950).

Es handelt sich um ein nach 1840 begonnenes umfängliches Mskr. des Jonathan Knight (1787/1858) über unbestimmte Gleichungen, worin auf die damals gebräuchlichen Lehrbücher und Aufgabensammlungen und die kleineren Beiträge in der Zeitschriftenliteratur Bezug genommen wird. Textproben über schwierigere quadratische und kubische Gleichungen mit Lösungen in großen Zahlen lassen Knight als vortrefflichen Fachmann erkennen. Genauere Einzelheiten verspricht Verf. in einer ausführlicheren Darstellung.

Josef E. Hofmann.

● **Whittaker, Sir Edmund:** From Euclid to Eddington. The Tarner Lectures, 1947. Cambridge University Press 1949. X, 212 p.

Bompiani, Enrico: Commemorazione del Socio Luigi Berzolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 396—410 (1950).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

Mambriani, A.: Leonida Tonelli. (19 aprile 1885 — 12 marzo 1946.) Riv. Mat. Univ. Parma 1, 157—188 (1950).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

Koutský, Karel: Zum 70. Geburtstage von Prof. Dr. Bohumil Bydžovský. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 349—D 357 (1950) [Tschechisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Una visione dell'opera scientifica di Tibor Radó. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 239—273 (1950).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

Harrington, R. P., N. J. Hoff and Paul Torda: Hans J. Reissner. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 1—12 (1949).

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Margenau, Henry:** The nature of physical reality. A philosophy of modern physics. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc. 1950. XIII, 479 p. \$ 6,50.

Weil, André: The future of mathematics. Amer. math. Monthly 57, 295—306 (1950).

Übersetzung des Artikels „L'avenir des mathématiques“ aus „Les grands courants de la pensée mathématique“, herausgegeben von F. Lionnais (Cahiers du Sud, Marseille 1948).

Łoś, Jerzy: Grundlagen der methodologischen Analysis von Mills Canons. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. F 2, 269—301 (1948) [Polnisch].

Pi Calleja, Pedro: Das tertium datur im Gegenparadoxon von Russell. Math. Notae, Rosario 9, 152—154 (1949) [Spanisch].

Die Bücher einer Bibliothek mögen alle verschiedene Titel tragen. Sie werden eingeteilt in Bücher, die ihren eigenen Titel im Text A) zitieren, B) nicht zitieren. 1. Die Bibliothek enthält dann kein Buch, in welchem genau die Bücher der Klasse B katalogisiert sind. (Einkleidung des bekannten Paradoxons von B. Russell über Mengen, die sich als Elemente selbst enthalten bzw. nicht enthalten. Daß an dem Zustandekommen des Paradoxons das Unendliche keine Rolle spielt, ist zwar bekannt, wird aber, worauf Verf. hinweist, von manchen Autoren nicht beachtet.) 2. Kataloge für die Bücherklasse A sind möglich und können selbst zu A oder zu B gehören, auch wenn sie gleichen Inhalt haben. (Dies nennt Verf. das „Gegenparadoxon“ und glaubt einen Zusammenhang mit intuitionistischer Logik zu sehen. Ref. hält das für übertrieben.)
Ernst Witt.

Levi, B.: Zur Note von Dr. Pi Calleja: „Über die logischen Paradoxien und das Prinzip des Tertium Non Datur“. Math. Notae, Rosario 9, 155—159 (1949) [Spanisch].

Zusammenhang der „Bibliothek“ von Pi Calleja (s. vorsteh. Referat) mit der Antinomie des Lünkers und mit anderen Gegenständen der Grundlagenforschung.
Ernst Witt.

Bengy-Puyvallée, Renaud de: Sur les relations d'incomposabilité dans les logiques de complémentarité. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 265—267 (1950).

Verf. gibt Definitionen von logischen Verknüpfungen der negationslosen Logik in nicht leicht verständlicher und auch nicht immer korrekter Form.

J. C. H. Gerretsen.

Griss, G. F. C.: Negationless intuitionistic mathematics. II. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 456—463; Indag. math., Amsterdam 12, 108—115 (1950).

[Teil I: Proc. Akad. Wet., Amsterdam 49, 1127—1133; Indag. math., Amsterdam 8, 675—681 (1946)]. In dieser Arbeit, sowie in mehreren vorhergehenden, tritt Verf. dafür ein, in der intuitionistischen Mathematik leere (d. h. unerfüllbare) Eigenschaften und die Negation zu vermeiden. Es ergibt sich eine entsprechend veränderte Definition der Disjunktion und der Fortfall der Kardinalzahl 0. — Hiervon ausgehend wird kurz ein negationsfreier Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen angegeben, mit Sätzen über Gleichheit, Unterscheidbarkeit, Kardinal- und Ordinalzahlen. Es folgt ein Abschnitt über die Einführung der ganzen und der rationalen Zahlen.
W. Markwald.

Goodstein, R. L.: The formal structure of a denumerable system. Trans. Amer. math. Soc. 68, 174—182 (1950).

Verf. nennt ein formales System klassisch, abzählbar, finitistisch, je nachdem, ob sich die Operatoren beziehen auf Variablen beliebiger, abzählbarer, endlicher Bereiche. Ziel der Abhandlung ist es, bei geeigneter Interpretation eine Reihe grundlegender Resultate der Analysis schon in einem abzählbaren System zu gewinnen. Grundlage ist das System Z_μ von Hilbert-Bernays. Der Begriff der rationalen Funktion wird eingeführt. Eine rationale Funktion $s_n = f_n/q^n$ heißt eine positive Dezimalzahl (endless decimal), wenn f_n eine positive ganzzahlige Folge, $q > 1$ und ganz, $0 \leq s_{n+1} - s_n < 1/q^n$. Entsprechend die negativen Dezimalzahlen. Eine Folge rationaler Zahlen, die das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt, besitzt eine explizit definierbare Dezimalzahl als Limes. Die rationale Funktion $f(n, \xi)$ konvergiere für jedes rationale Argument ξ (z. B. eines Intervalls). Dann wird das metamathematische Zeichen $\lim_n f(n, \xi)$ eine Dezimalfunktion eines rationalen Argumentes genannt. Für Dezimalfunktionen ganzzahliger Argumente wird die Konvergenz erklärt. Dezimalfunktionen eines rationalen Argumentes, deren Funktionswerte bei konvergenten Argumentfolgen konvergieren, lassen sich als Dezimalfunktionen dezimaler Argumente auffassen. Für derartige Funktionen werden die

wichtigsten Begriffe (bis zum Integralbegriff) der klassischen Analysis eingeführt. Es lassen sich Sätze, wie der Zwischenwertsatz und das Rollesche Theorem, beweisen, wobei das tertium non datur im Gegensatz zur klassischen Analysis nur auf abzählbare Bereiche angewandt wird.

Hans Hermes.

Fitch, Frederic B.: A demonstrably consistent mathematics. Part I. *J. symbolic Logic* 15, 17—24 (1950).

Früher hat Verf. folgende Definitionen gegeben: Ein Ausdruck c eines Kalküls stellt die Klasse C von Ausdrücken in der Ausdrucksklasse D dar, wenn für jeden Ausdruck gilt: $a \in C$ genau dann, wenn $(c a) \in D$ [*J. symbolic Logic* 9, 57—62 (1944)]; c stellt C in D vollständig dar, wenn darüber hinaus gilt: $a \notin C$ genau dann, wenn $(\sim(c a)) \in D$ (dies. Zbl. 30, 193). Die hier und in einer weiteren Arbeit (dies. Zbl. 35, 8) begonnenen Untersuchungen werden in vorliegender Abhandlung fortgeführt. Es wird eine allgemeinere Definition der rationalen und reellen Zahlen gegeben, die über die bisherige Definition hinaus auch negative Zahlen zuläßt. Ein Ausdruck wird angegeben, der die Klasse der reellen Zahlen im vorliegenden Kalkül darstellt, während die Klasse der reellen (im Gegensatz zur Klasse der rationalen) Zahlen nicht vollständig dargestellt werden kann. Verf. entwickelt die Grundzüge der Theorie der reellen Zahlen (Konvergenz, Sätze von Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß) und gibt Ausblicke auf die Lebesguesche Maßtheorie. *H. Hermes.*

Łoś, Jerzy: Sur la notion d'indépendance dans la métamathématique. *Časopis Mat. Fys., Praha* 74, Nr. 3, 138—139 und polnische Zusammenfassg. 140 (1950).

Es sei $T = (S, L, \rightarrow, \neg)$ eine deduktive Theorie [s. Tarski, *Fundam. Math.* Warszawa 25, 501—526 (1935); dies. Zbl. 12, 385]. Definiert man für $a, b \in S$, $X \subset S$: 1. $a + b = \bar{a} \rightarrow b$; 2. $a \sim b$, wenn $a \rightarrow b \in L$ und $b \rightarrow a \in L$ und 3. $a \in Cn(X)$, wenn $a_1, \dots, a_n \in S$ existieren, so daß $\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n \rightarrow a \in L$, so ist $B_T = (S, \sim, +, \neg)$ ein Boolescher Verband. Definiert man nun für die Elemente von $X \subset S$ die algebraische Unabhängigkeit in B_T nach Marczewski (dies. Zbl. 38, 35) und die metamathematische Unabhängigkeit in T durch die Forderung: Für jedes $a \in X$ soll $Cn(X - (a)) \neq Cn(X)$ gelten, so folgt aus der algebraischen die metamathematische Unabhängigkeit, jedoch nicht umgekehrt.

Demetrios A. Kappos.

Martin, Norman M.: Some analogues of the Sheffer stroke function in n -valued logic. *Proc. Akad. Wet., Amsterdam* 53, 1100—1107; *Indag. math., Amsterdam* 12, 393—400 (1950).

n, k seien natürliche Zahlen $\neq 0$, M eine n -zählige Menge. Eine Abbildung von M^k in M heißt eine „ n -wertige, k -stellige Funktion“. Eine n -wertige Funktion über M heiße „ n -wertige Sheffer-Funktion“, wenn aus ihr jede n -wertige Funktion über M durch Einsetzungen gewonnen werden kann (extensional). Eine Funktion $f_z(x_1, \dots, x_n)$ heiße „vollständig“, wenn sie bei Einsetzung einer beliebigen natürlichen Zahl a für z eine a -wertige Sheffer-Funktion ergibt. Die 2-wertigen Funktionen sind die bekannten Wahrheitsfunktionen der 2-wertigen Aussagenlogik, für die nach Sheffer durch das „Weder ..., noch ...“ eine zweistellige Sheffer-Funktion gegeben ist. Webb hat die Existenz einer zweistelligen vollständigen Funktion $f_z(x, y)$ bewiesen [*Proc. nat. Acad. Sci. USA.* 21, 252—254 (1935); dies. Zbl. 12, 1]. Verf. gibt mehrere zweistellige vollständige Funktionen an, sowie hinreichende, aber nicht notwendige Bedingungen für die Vollständigkeit zweistelliger Funktionen.

W. Markwald.

Novak, I. L.: A construction for models of consistent systems. *Fundamenta Math., Warszawa* 37, 87—110 (1950).

S sei ein Axiomensystem mit unendlich vielen Variablen, endlich vielen primitiven Verknüpfungen, unter denen die Identität, die Aussagenverknüpfungen und die Quantoren enthalten sind, ferner mit endlich vielen Axiomen und Axiomenschemata mit Einschluß derjenigen für den Aussagenkalkül, für die Identität und

die Quantoren, also ein Axiomensystem, das mit den Mitteln des engeren Prädikatenkalküls dargestellt werden kann. S' sei eine Erweiterung des Systems, das dem Übergang vom Prädikatenkalkül der ersten Stufe zu dem der nächsthöheren Stufe entspricht, aber im Sinne der verzweigten Logik, indem als Einsetzung für die Prädikatenvariablen nur solche Ausdrücke zugelassen werden, die keine gebundene Prädikatenvariable enthalten. Unter S_e ist das System zu verstehen, das aus S durch Einführung des Hilbertschen ε -Operators entsteht. Mit den Mitteln der Syntax von S_e kann dann, wie gezeigt wird, ein Modell für S' konstruiert werden. Bei der Konstruktion dieses Modells wird weitgehend von den Ergebnissen von W. V. Quine (Mathematical Logic, New York 1940) Gebrauch gemacht. Aus der Möglichkeit dieser Konstruktion ergibt sich z. B. folgendes: Wenn S die Arithmetik enthält und widerspruchsfrei ist, so ist S' widerspruchsfrei. Wenn das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem für die Mengenlehre widerspruchsfrei ist, so gilt das gleiche für das von Neumann-Bernays-Gödelsche System. Ferner ergibt sich ein neuer Beweis für das Löwenheim-Skolemsche Theorem.

Wilh. Ackermann.

Wang, Hao: A formal system of logic. J. symbolic Logic 15, 25—32 (1950).

Verf. gibt einleitend einen Überblick über die logischen Systeme, die als Abschwächungen des widerspruchsvollen Systems (1) aus Quine, Mathematical logic (New York, 1940) aufgestellt worden sind. In diesem System konnte Rosser unter wesentlicher Benutzung des Axioms *200 die Burali-Fortische Antinomie herleiten. Ein Ausdruck H des Quineschen Systems heißt „geschichtet“ (stratified), wenn es möglich ist, alle Variablen von H so auf natürliche Zahlen abzubilden, daß jedes Atom $a \in b$ aus H übergeht in $n \in n + 1$. Durch „ $\hat{x}H$ “ sei die Klasse der x , auf die H zutrifft, symbolisiert. Dann lautet das „kritische“ Axiom *200: Ist H geschichtet und enthält H genau die freien Variablen x, y_1, \dots, y_n , so

$$\vdash \exists z_1 (y_1 \in z_1) \wedge \dots \wedge \exists z_n (y_n \in z_n) \rightarrow \exists y (\hat{x}H \in y).$$

In „New foundations for mathematical logic“ [Amer. math. Monthly 44, 70—80 (1937); dies. Zbl. 16, 193] gibt Quine ein bisher nicht widerlegtes System (2) an, in dem statt *200 ein schwächeres Axiom auftritt, das nur die Existenz bestimmter Klassen fordert, aber nicht verlangt, daß dieselben auch Elemente sind. Weitere Abschwächungen stammen von Quine und Hao Wang (vgl. dies. Zbl. 32, 99—101). Es ist bisher nicht gelungen, in (2) die Existenz einer unendlichen Klasse oder, hiermit gleichwertig, das Peanosche Axiom $m + 1 = n + 1 \rightarrow m = n$ zu beweisen. — Ein Ausdruck H aus (1) heiße „normal“, wenn alle Quantifikationen in H von der Form $\exists z (y \in z), \forall x (\exists z (x \in z) \rightarrow H')$ oder $\exists x (\exists z (x \in z) \wedge H')$ sind (Beschränkung auf Elemente). Das vom Verf. angegebene System P entsteht aus (1) durch Ersetzung von *200 durch **200: Ist H normal und geschichtet und ... (usw. wie in *200). In P ist die Rossersche Widerlegung ebenso wie in (2) unmöglich, ferner lassen sich alle Sätze der „Mathematical logic“ (bei Ersetzung von *200 durch **200 in einigen Beweisen) herleiten, insbesondere also ein Existenzsatz für unendliche Klassen. Die Elemente von P entsprechen genau den Klassen von (2). Schließlich beweist Verf. unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der Theorie der reellen Zahlen, daß aus der Widerspruchsfreiheit des (schwächeren) Systems (2) die von P folgt.

W. Markwald.

Kalmár, László: Contributions to the reduction theory of the decision problem. I. Acta math. Acad. Sci. Hung. 1, 64—73 und russische Zusammenfassg. 73 (1950).

Die Arbeit enthält einen weiteren Beitrag zur Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems. Es wird gezeigt, daß sich zu jeder Formel des engeren Prädikatenkalküls eine andere konstruieren läßt, die nur eine einzige zweistellige Prädikatenvariable enthält, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(E x_3) \dots (E x_{n-1})(x_n)$ hat und in bezug auf Erfüllbarkeit mit der gegebenen Formel gleichwertig

ist. Der Vergleich mit dem entsprechenden Satz über das Gödelsche Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(E x_4) \cdots (E x_n)$, bei dem übrigens die Möglichkeit der Beschränkung auf nur eine einzige Prädikatenvariable ebenfalls vom Verf. zusammen mit J. Surányi bewiesen wurde, zeigt, daß in beiden Fällen die Anzahl der Allzeichen auf drei beschränkt ist, aber im vorliegenden Falle haben die Seinszeichen eine günstigere Stellung, da ihnen nur zwei Allzeichen vorangehen. — Beim Beweise wird von einer Formel ausgegangen, die das Gödelsche Präfix hat und in einem Individuenbereich J durch ein Prädikat Φ erfüllbar ist. Eine gleichfalls erfüllbare Formel mit dem verlangten Präfix wird in dem Individuenbereich $J + J^2 + \{\Phi\}$ konstruiert, wobei dann weiter gezeigt wird, daß auch der umgekehrte Weg möglich ist. Für die Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

Wilh. Ackermann.

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

• Miller, E. B. and R. M. Thrall: College algebra. New York: Ronald Press Company 1950. 493 p. \$ 3,75.

• Erickson, Robert L.: Fundamental algebra with practical applications. London: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., 1949. 317 p. 24 s.

Es handelt sich um eine Einführung in das elementare Rechnen, die sich an einen mathematisch nicht vorgebildeten Kreis wendet. Das 317 Seiten umfassende Buch gliedert sich in neun Kapitel: 1. rationales Rechnen mit positiven Zahlen; 2. Einführung negativer Zahlen; 3. Potenzen und Wurzeln; 4. Logarithmen; 5. Buchstabenrechnung; 6. Funktionen, lineare und quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme; 7. Proportionen; 8. Einführung in die ebene Trigonometrie; 9. Arithmetische und geometrische Reihen. — Dem Zweck des Buches entsprechend ist die Darstellungsweise sehr ausführlich gehalten und wesentlich durch pädagogische Gesichtspunkte bestimmt. Jeder Schritt wird durch ein umfangreiches Aufgabenmaterial unterbaut. Dem naiven Standpunkt gemäß wird im allgemeinen auf Beweise verzichtet. In einem Anhang werden Anwendungen und Ausblicke (z. B. Determinanten) gegeben. Ein Tafelwerk ist angefügt.

Hans Joachim Kowalsky.

• Lietzmann, W.: Wo steckt der Fehler? Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1950. 182 S. mit 120 Fig. Geb. DM 5,40.

This volume has developed from the much smaller work of the same name published in 1913. It is divided into three sections A. Illusions and incorrect inferences. B. Fallacies. C. Danger signs in analysis. This last section is new. — Some of the paradoxes are well known, but the whole book forms a stimulating collection of illustrative material for teaching. — Misprints. Page 46, last line of section 18, for 5 read 2. In Fig. 48, the letters m and p are missing. Page 62, last line but one, a minus sign is missing.

W. W. Sawyer.

Milošević, Kovina: Sur une formule sommatoire. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 2, Nr. 1/2, 69—74 und französ. Zusammenfassg. 74 (1950) [Serbisch].

L'A. généralise la formule de Bernoulli relative à la somme des p -ièmes puissances des nombres entiers, comme suit. Soient données p progressions arithmétiques

$$a_r, a_r + d_r, \dots, a_r + (n-1)d_r \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

alors la somme des produits respectifs des termes de ces progressions

$$\prod_{r=1}^p a_r + \prod_{r=1}^p (a_r + d_r) + \cdots + \prod_{r=1}^p \{a_r + (n-1)d_r\}$$

peut être mise sous la forme

$$\sum_{k=1}^{p+1} n^{p-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{p-j}{k-j-1} H_p^{p-j},$$

où l'on a posé, pour abrégier $\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1}$, et où B_m désigne les nombres de Bernoulli définis symboliquement par $(1+B)^m - B^m = 0$, tandis que les quantités H_p^a sont les polynômes considérés par Mitrinović (ce Zbl. 31, 355) définis comme suit:

$$\prod_{r=1}^p (a_r + x d_r) = \sum_{q=0}^p H_p^a x^q.$$

(Autorefe. i. t.)

Popović, Vojislav: Une démonstration de l'inégalité de Cauchy. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* **1**, Nr. 3/4, 133—134 und französ. Zusammenfassg. 135 (1949) [Serbisch].

Verf. beweist die Ungleichung $\left(\prod_{v=1}^n a_v\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n a_v$, $a_v > 0$, durch Induktion nach n .

Markovitch, Dragol'ub: Sur quelques limites du module d'une somme. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* **2**, Nr. 1/2, 31—34 und französ. Zusammenfassg. 34—35 (1950) [Serbisch].

L'A. demontre les résultats: 1. Si $a_v > 0$, $0 < \vartheta < \pi$, on a

$$\left| \sum_{v=0}^n a_v e^{v\vartheta i} \right| \leq a_0 \operatorname{Max}_v \left\{ \frac{1 + r^{v+1}}{|1 - r e^{\vartheta i}|} \right\} \quad \text{où } r = \operatorname{Max}_v \left\{ \frac{a_{v+1}}{a_v} \right\} \quad (0 \leq v \leq n).$$

Dans le cas $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$, $r < 1$, on a

$$\left| \sum_{v=0}^n a_v e^{v\vartheta i} \right| \leq a_0 \frac{1 + r}{|1 - r e^{\vartheta i}|}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

2. Si les nombres a_v sont complexes, $0 < \vartheta < \pi$, on a

$$\left| \sum_{v=0}^n a_v e^{v\vartheta i} \right| \leq L_n \operatorname{Max}_v \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} (v+1) \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} \right\} \quad (0 \leq v \leq n)$$

où L_n désigne la ligne brisée $|a_0 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|$. (Autoreferat.)

Mitrinovich, Dragoslav S.: Sur les opérations max et min. *Fac. Phil. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat., Annuaire* **3**, Nr. 4, 1—8 und französ. Zusammenfassg. 9—10 (1950) [Kroatisch].

Nach einigen kurzen Bemerkungen über (z. T. bekannte) Eigenschaften der Operationen max und min beweist Verf. den Satz: Ist p eine ungerade natürliche Zahl, $k = \frac{1}{2}(p+1)$, so gilt für p beliebige reelle Zahlen A_1, \dots, A_p

$$\min \{ \max (A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \} = \max \{ \min (A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) \},$$

wo A_{i_1}, \dots, A_{i_k} alle Kombinationen zu je k (ohne Wiederholungen) von A_1, \dots, A_p durchläuft. Für $p=3$ vgl. O. Ore, *Number theory and its history* (New York 1948), p. 107. — Zum Schluß formuliert Verf. einen entsprechenden Satz für Teilmengen A_1, \dots, A_p einer Menge A :

$$\bigcup_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \bigcap_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}).$$

Für $p=3$ ergibt sich die von Ore (*L'algèbre abstraite, Actual. sci. industr.* no 362, Paris 1936; dies. Zbl. **15**, 387) als „Axiom von Dedekind“ bezeichnete Relation. (Aus der französ. Zusammenfassg.).

Yamamoto, Koichi: Asymptotic number of latin rectangles and the symbolic method. *Sugaku* **2**, Nr. 2 (1949) [Japanisch].

Un rectangle latin est un système de permutations discordantes 2 à 2, des mêmes éléments. Dans un ensemble fini Ω , soit $\#P$ le nombre des éléments $\in \Omega$ satisfaisant à la condition P ; soit E la condition nulle, P' la négation de P . Alors: $\#P'Q'R' \dots = \#(E-P)(E-Q)(E-R) \dots$. — Cette identité fournit une voie simple et naturelle pour trouver le nombre des rectangles latins de trois lignes:

$$f(n, 3) = \sum_{i=0}^n 2^i \cdot i! \binom{n}{i}^2 \omega_{n-i},$$

$$\omega_p = \# \sum (-1)^r U_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p), \quad \# U_r = (n!)^2 (n-r)! \binom{3n-2r+2}{r}.$$

L'A. en déduit une valeur asymptotique de f . (Voir l'A., ce Zbl. **37**, 298).

Albert Sade.

Lineare Algebra. Polynome.

Mitrinovich, D. S.: Remarques sur des déterminants du type d'Escherich. *Bull. Soc. Math. Phys. Républ. popul. Macédoine* **1**, 5—16 und französ. Zusammenfassg. 17—20 (1950) [Serbisch].

Escherich berechnete 1892 (Mh. Math. Phys., Wien 3) den Wert der Determinanten, deren Elemente a_{ik} nur für $i = 1$, $i = k$ und $i = k + 1$ ungleich Null sind. Verf. betrachtet spezielle solche Determinanten und einige Beziehungen zwischen ihnen, stellt die Laguerreschen Polynome in dieser Form dar, zeigt die Lösung einer Aufgabe von Pólya und Szegő und schließt mit einigen geschichtlichen Bemerkungen.

Gustav Lochs.

Stoyakovitch (Stojaković), Minko: Sur les déterminants semi-adjoints. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 137—144 und französ. Zusammenfassg. 144 (1949) [Serbisch].

Généralisation du concept du déterminant adjoint. On déduit certaines relations relatives aux déterminants adjoints généralisés. Les résultats sont appliqués à la démonstration de certaines identités.

(Autoreferat.)

Coheen, H. E.: On a lemma of Stieltjes on matrices. Amer. math. Monthly 56, 328—329 (1949).

Mattioli, Ennio: Segnatura e divisori elementari di una matrice. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 328—336 (1949).

Aus der von Cherubino (dies. Zbl. 26, 51) angegebenen Normalform einer Matrix lassen sich die Scorzaschen Signaturen direkt ablesen. Verf. leitet die schon bekannten Beziehungen zwischen Signaturen und Exponenten der Elementarteiler durch einfache Überlegungen an der Normalform ab und gibt eine unimodulare, orthogonale Matrix an, die die Cherubinosche Normalform in die Jordansche transformiert.

Gustav Lochs.

Roth, William E.: On the matrix equation $X^2 + AX + XB + C = 0$. Proc. Amer. math. Soc. 1, 586—589 (1950).

Es werden die Lösungen der Matrizengleichung (1) $X^2 + AX + XB + C = 0$ untersucht, wobei X, A, B, \dots n -reihige, quadratische Matrizen mit Elementen aus einem beliebigen Unterkörper \mathfrak{F} des Körpers der komplexen Zahlen sind. Verf. zeigt: Wenn (1) eine Lösung X besitzt, dann existiert mindestens ein Paar von Polynomen $f(t)$, $g(t)$ mit Koeffizienten aus \mathfrak{F} , deren Grade $\leq n$ sind, so daß mit der Bezeichnung $R = \begin{pmatrix} -B, & I \\ -C, & A \end{pmatrix}$ (I Einheitsmatrix) gilt: $f(R)g(R) = 0$, $f(X + A) = 0$, $g(-X - B) = 0$. Dabei ist $f(t)g(t)$ nicht notwendig das Minimalpolynom von R , jedoch ein Teiler von $|tI - R|$. Ferner ist $\begin{pmatrix} X, & I \\ 0, & 0 \end{pmatrix} f(R) = 0$; sei $f(R) = \begin{pmatrix} U, & M \\ V, & N \end{pmatrix}$ und ist M nicht singulär, so ist auch $X_1 = -M^{-1}(X + B)M - A$ eine Lösung von (1). Umgekehrt gilt: Ist $f(t)$ ein Polynom von einem Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus \mathfrak{F} und ist in $f(R) = \begin{pmatrix} U, & M \\ V, & N \end{pmatrix}$ die Matrix M nicht singulär, so ist jede Lösung X von $\begin{pmatrix} X, & I \\ 0, & 0 \end{pmatrix} f(R) = 0$ auch Lösung von (1).

Friedrich Kasch.

Reid, William T.: A note on the characteristic polynomials of certain matrices. Proc. Amer. math. Soc. 1, 584—585 (1950).

A sei eine $n \times m$ Matrix (n Zeilen, m Spalten) und D eine $n \times n$ Matrix mit Elementen aus einem beliebigen Körper K . Dann und nur dann stimmen für beliebige $m \times n$ Matrizen B mit Elementen aus K die charakteristischen Polynome von AB und $AB + D$ überein, also $|tI - AB| = |tI - AB - D|$, wenn D nilpotent und $DA = 0$ ist.

Friedrich Kasch.

Hua, Loo-Keng: A theorem on matrices and its application to Grassmann space. Sci. Rep. nat. Tsing Hua Univ., A 5, 150—181 (1948).

Designant par $Z^{(n,m)}$ une matrice de n lignes et de m colonnes, à éléments dans un corps Φ , l'A. établit que toute application biunivoque de l'ensemble des matrices $Z^{(n,m)}$, conservant la „cohérence“ de deux matrices Z_1, Z_2 , est de la forme

$$Z_1 = P Z^{\sigma} Q + R,$$

où P est régulière d'ordre n , Q régulière d'ordre m , $R = R^{(n,m)}$, σ un automorphisme de Φ . On suppose, de plus, $1 < n \leq m$. Dans le cas où $n = m$, on a aussi $Z_1 = P Z'^\sigma Q + R$, où Z' désigne la matrice transposée de Z . — Deux matrices sont dites cohérentes si leur différence est de rang un. M. Lepage.

Murnaghan, Francis D.: Schwarz' inequality and Lorentz spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 673—676 (1950).

Verf. gibt außer dem üblichen auf die Nichtnegativität von

$$(x_1^* x_1) \varepsilon^2 + 2 |x_1^* x_2| \varepsilon + (x_2^* x_2)$$

gegründeten Beweis (x_1^* und x_2^* sind die konjugiert transponierten Matrizen der „ n -mal Eins“-Matrizen x_1 und x_2) noch zwei Beweise für die Schwarzsche Ungleichung $(x_1^* x_2) (x_2^* x_1) \leq (x_1^* x_1) (x_2^* x_2)$ im euklidischen oder unitär metrischen Raum. Der erste Beweis erfolgt durch Zerlegung der aus x_1 und x_2 zusammengestellten n -mal zwei Matrix X in $X = YA$, wo $y_1^* y_1 = 1$, $y_2 = -(y_1^* x_2) y_1 + x_2$ und A singular bzw. nicht singular ist, je nachdem x_1 und x_2 linear unabhängig oder abhängig sind. Der zweite Beweis braucht die Diagonalisationseigenschaft Hermitescher Matrizen. Weiter wird die Schwarzsche Ungleichung für Lorentz-Räume folgendermaßen verallgemeinert: $(x_1^* F x_1) (x_2^* F x_2) \leq |x_1^* F x_2|^2$, je nachdem es eine lineare Kombination z von x_1 und x_2 mit negativem $z^* F z$ bzw. eine mit $z^* F z = 0$, aber keine mit $z^* F z < 0$ gibt bzw. $X^* F X > 0$ ist, wo F die „ n -mal n “-Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind außer dem letzten, das gleich -1 ist. — Die Arbeit enthält auch Bemerkungen über Verallgemeinerungen für mehrere Matrizen im Lorentz-Raum und für den quasi-Lorentz-Raum. Joh. Aczél.

Veen, S. C. v.: Elementares vom höheren Standpunkt aus: Theorie der Kreisteilung. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950, 008, 7 S. (1950) [Holländisch].

Es wird die Kreisteilungstheorie vom Standpunkt eines Einführungskollegs in die höhere Algebra aus behandelt. Wolfgang Krull.

Mikusiński, Jan G.: Sur les zéros des polynômes et de leurs dérivées successives. Prace mat.-fiz., Warszawa **47**, 21—40 (1949).

Zu jedem System der nichtnegativen ganzen Zahlen r_0, r_1, \dots, r_n mit den Bedingungen $r_{i-1} \leq r_i + 1$ läßt sich ein Polynom $W(x)$ vom Grad $m = r_n + n$ bestimmen, so daß die Derivierte $W^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $W^{(0)}(x) \equiv W(x)$) im offenen Intervall (a, b) genau r_i einfache Nullstellen besitzt. — Der im Jahre 1939 angedeutete Beweis (dies. Zbl. **21**, 214) wird hier eingehend ausgeführt.

Gyula Sz.-Nagy.

Schmidt, Hermann: Zur Frage, ob alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung einen negativen Realteil haben (Stabilitätsfrage). Z. angew. Math. Mech., **30**, 382—384 (1950).

A method is given for the determination of the number of roots with negative real parts of a polynomial equation $\Delta(p) = 0$ with positive real coefficients. If $\Delta(p) = g(p) + h(p) = 0$ has at least one root with negative real part, where $g(p) = c_0 + c_2 p^2 + c_4 p^4 + \dots$, $h(p) = c_1 p + c_3 p^3 + c_5 p^5 + \dots$, then $\Delta_1(p) = [g(p) h(p_1) - g(p_1) h(p)] / (p - p_1) = g_1(p) + h_1(p) = 0$ (where $p_1 = -1$) is an equation of degree $n - 1$ which in the negative half-plane has one root less than $\Delta(p) = 0$. The method is similar to that of I. Schur [Z. angew. Math. Mech. **1**, 307—311 (1921)] and E. Frank (this Zbl. **32**, 103). Evelyn Frank.

Ivanović, Branislav: Sur la tendance de distribution des zéros d'un polynôme donné. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije **2**, Nr. 1/2, 49—53 und französ. Zusammenfassg. 53—54 (1950) [Serbisch].

Dans cet article on a proposé de démontrer comment, étant donné un polynôme $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, dont le degré n est un grand nombre, peut-on déterminer

la tendance de la distribution des zéros du polynôme ne connaissant que les trois premiers coefficients a_0, a_1, a_2 . — L'expression $S_g \{k\} = \text{Im} \{A\}, A = \frac{(n-1)a_1^2 - 2na_0a_2}{n^2a_0^2}$, donne la réponse à la question si la distribution des zéros montre une tendance à l'accroissement ou au décroissement, c'est-à-dire si les parties imaginaires des zéros croissent ($\text{Im} \{A\} > 0$), ou décroissent ($\text{Im} \{A\} < 0$) dans leur ensemble lorsque les parties réelles croissent. — La valeur même du coefficient de régression $k = \text{tg}(\frac{1}{2} \text{arc} \{A\})$ nous indique la vitesse de croissance de la répartition des zéros. — Enfin, l'expression $S_g \{\sigma_1^2 - \sigma_2^2\} = \text{Re} \{A\}$ donne la réponse à la question si la dispersion horizontale est plus grande ($\text{Re} \{A\} > 0$) ou plus petite ($\text{Re} \{A\} < 0$) que la dispersion verticale. — De cette façon nous obtenons une certaine image de la répartition des zéros du polynôme sur le plan complexe en connaissant les trois premiers coefficients, ce qui peut présenter un intérêt particulier lorsque le degré n du polynôme est un grand nombre.

(Autoreferat.)

Markovitch, Dragoljub: Extension d'un théorème de Hurwitz. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 113—115 und französ. Zusammenfassg. 115 (1949) [Serbisch].

A. Hurwitz a montré que l'équation trinôme $1 + x + ax^n = 0$ possède au moins un zéro dans le cercle fixe $|x + 1| \leq 1$ (a quantité réelle au complexe, n entier positif). — Par une voie élémentaire, au moyen de relations connues entre les fonctions symétriques des zéros d'une équation algébrique et ses coefficients, l'A. généralise ce théorème en montrant que l'équation trinôme $1 + x^p + ax^n = 0$ possède au moins un zéro dans le même cercle si p désigne un entier positif impair ($p < m$).

(Autoreferat.)

Platone, Giulio: Complementi al metodo delle parabole osculanti per la separazione delle radici di una equazione di quarto grado. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 43—51 (1949).

Bezeichnet $y(x_0, x)$ die im Punkte x_0 oskulierende Parabel der Funktion $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d reell), so gilt $f > y$ für alle $x \neq x_0$, wenn $x_0 = -a/4$ gewählt wird. Da für $f'(-a/4) > 0$ (< 0) f und y konvex (konkav) sind, erhält man sofort Aussagen über die reellen Nullstellen von f , wenn die Nullstellen von y bekannt sind. Verf. verallgemeinert diese von Picone stammenden Betrachtungen auf den Fall eines beliebig gewählten x_0 und kann dann z. B. vier reelle Nullstellen von $f(x)$ durch die Nullstellen dreier geeignet gewählter oskulierender Parabeln eingrenzen.

Johannes Weissinger.

Gruppentheorie:

Bateman, P. T.: A remark on infinite groups. Amer. math Monthly 57, 623—624 (1950).

Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes wird bewiesen: Für jede Quasigruppe G gibt es zwei eindeutige Abbildungen von G auf sich selbst $x \rightarrow \Theta(x)$ und $x \rightarrow \eta(x)$, für die $\eta(x) = x\Theta(x)$ gilt. Man kann dabei Θ so wählen, daß für ein einzelnes willkürliches Elementpaar $\Theta(a) = b$ ist.

F. W. Levi.

Devidé, Vladimir: Einige Eigenschaften von Gruppen, in welchen mehrere Operationen definiert sind. Periodicum math.-phys.-astron., Zagreb, II. S. 4, 97—101 und kroatische Zusammenfassg. 102—103 (1949).

Seien in einer Menge S der Elemente A, B, C, \dots eine Menge von Kompositionen $\Sigma = \{\alpha, \beta, \dots\}$ vorgegeben, wobei die Komposition α durch $A \alpha B = C$ notiert wird. Für eine dieser Kompositionen $\varphi \in \Sigma$ soll S eine Gruppe S_φ bilden. — Verf. zeigt, daß, wenn für jedes Paar $\alpha, \beta \in \Sigma$ die „Assoziativität“ $(A \alpha B)\beta C = A \alpha (B\beta C)$ gilt, S für jede Komposition aus Σ eine zu S_φ isomorphe Gruppe bildet. Man erhält alle mit φ durch die Assoziativitätsregel gebundenen Kompositionen α durch die Definition $A \alpha B = A \varphi K \varphi B$, wo K irgendein Element von S ist. Für die Gruppe S_α ist dann K^{-1} das Einheitsselement und $A \rightarrow A \varphi K^{-1}$ ist ein Isomorphismus der Gruppe S_φ auf die Gruppe S_α .

Leo Kaloujnine.

Cohen, L. W. and Casper Goffman: On completeness in the sense of Archimedes. Amer. J. Math. 72, 747—751 (1950).

Die geordnete abelsche Gruppe H ist eine archimedische Erweiterung ihrer Untergruppe U , wenn es zu jedem positiven Element h in H ein Element u in U und

eine positive ganze Zahl m derart gibt, daß $h \leq mu$ und $u \leq mh$ ist; und H werde als Dedekindsche Erweiterung von U bezeichnet, wenn jedes Element in H eindeutig durch seinen Dedekindschen Schnitt in U [im engeren Sinne] bestimmt wird. Schließlich heißt eine geordnete abelsche Gruppe diskret, wenn sie ein kleinstes positives Element enthält; und isolierte Untergruppen sind Untergruppen, die gleichzeitig Intervalle sind. Verff. beweisen dann in Vervollständigung früherer Resultate (dies. Zbl. 37, 13) folgenden interessanten Satz: Die geordnete abelsche Gruppe H besitzt dann und nur dann keine [eentlichen] archimedischen Erweiterungen, wenn H/J für jede eigentliche isolierte Untergruppe J nicht diskret ist und keine [eentlichen] Dedekindschen Erweiterungen besitzt. *Reinhold Baer.*

Fuchs, L.: The extension of partially ordered groups. *Acta math. Acad. Sci. Hung.* 1, 118—124 und russische Zusammenfassg. 124 (1950).

Ist G eine teilweise geordnete Gruppe, so versteht Verf. unter einer konvexen Untergruppe von G eine Untergruppe S von G , die mit den Elementen a und b auch jedes $a \leq c \leq b$ erfüllende Element c enthält. Ist N ein konvexer Normalteiler von G , so besitzt G/N eine „natürliche“ teilweise Ordnung; und dasselbe gilt natürlich auch von N . Ist umgekehrt N Normalteiler der nicht-geordneten Gruppe G , und sind sowohl N wie auch G/N teilweise geordnete Gruppen, so läßt sich stets wenigstens eine teilweise Ordnung von G finden, die die gegebenen teilweisen Ordnungen in N und G/N induziert, nämlich die lexikographische Ordnung. Verf. gibt einen Überblick über alle möglichen teilweisen Ordnungen dieser Art; diese Konstruktion ist eine Erweiterung der bekannten Schreierschen Konstruktion der Erweiterungsgruppen. *Reinhold Baer.*

Ohnishi, Masao: On linearization of ordered groups. *Osaka math. J.* 2, 161—164 (1950).

Verf. gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß eine teilweise Ordnung einer (nichtabelschen) Gruppe G eine lineare Erweiterung zuläßt. Dieses ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von C. J. Everett (dies. Zbl. 35, 17), das für den kommutativen Fall gegeben war. Es sei \mathfrak{C}_a die Gesamtheit der Elemente $a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) mit a_i von der Form $a_i = x a x^{-1}$ für irgendein $x \in G$. Das erwähnte Kriterium besteht aus den folgenden zwei Bedingungen: 1. \mathfrak{C}_a und $\mathfrak{C}_{a^{-1}}$ sind elementfremd für jedes $a \neq 1$; 2. Für jedes Elementenpaar x, y aus \mathfrak{C}_a haben die Mengen \mathfrak{C}_x und \mathfrak{C}_y ein gemeinsames Element. Der Beweis des Hinreichens wird dem Everettschen Beweisgange ähnlich geführt. Die Notwendigkeit von 1. ist evident, während die von 2. durch ein Gegenbeispiel befestigt wird. *Ladislav Fuchs.*

Černikov, S. N.: Über den Zentralisator eines vollständigen Abelschen Normalteilers in einer unendlichen periodischen Gruppe. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 72, 243—246 (1950) [Russisch].

Sei P eine unendliche periodische Gruppe und A eine vollständige Abelsche normale Untergruppe von P . Verf. stellt Beziehungen auf zwischen dem Zentralisator von A in P und dem Zentralisator derjenigen Untergruppe von A , die von den Elementen von Primzahl-Ordnung (oder Primzahl-Quadrat-Ordnung) erzeugt wird. Satz 1: Wenn die Faktorgruppe P/A eine endliche zyklische Gruppe ist und das Zentrum von P alle Elemente von A enthält, deren Ordnung das Quadrat einer Primzahl ist, dann ist P selbst eine Abelsche Gruppe. Wenn A oder P/A keine Elemente gerader Ordnung enthält, so genügt es schon, die Elemente von Primzahl-Ordnung in A zu betrachten. Nur eine andere Formulierung ist Satz 2: Wenn die Elemente von Primzahl-Quadrat-Ordnung (oder unter denselben Einschränkungen wie oben von Primzahl-Ordnung) im Zentrum von P enthalten sind, so ist die ganze Gruppe A im Zentrum von P enthalten. Satz 3: Wenn mindestens eine der maximalen Abelschen Untergruppen einer beliebigen periodischen Gruppe P

Normalteiler in P und schichtweise endlich ist (d. h. zu jeder auftretenden Ordnung nur endlich viele Elemente dieser Ordnung enthält), so ist P eine Erweiterung eines direkten Produktes einer endlichen Anzahl von Gruppen des Typs (p^∞) für diverse p vermittelt einer endlichen Gruppe. Satz 4: Wenn wenigstens ein maximaler Abelscher Normalteiler einer unendlichen Gruppe P mit aufsteigender Zentralreihe nilpotent ist, so ist P ebenfalls nilpotent. Nilpotent bedeutet in diesem Zusammenhang: daß die Gruppe Erweiterung eines direkten Produktes von Gruppen des Typs (p^∞) (dieses Mal mit gleichem p !) vermittelt einer endlichen p -Gruppe. Der Satz bleibt bei geeigneter Erweiterung des Begriffs der Nilpotenz noch richtig, wenn P eine torsions-freie Gruppe ist (d. h. ohne Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$). Dagegen zeigt Verf. durch ein Beispiel, daß der Satz für gemischte Gruppen, d. h. mit Elementen endlicher und unendlicher Ordnung, nicht mehr gilt, nicht einmal wenn alle maximalen Abelschen Normalteiler nilpotent sind. *Kurt A. Hirsch.*

Černikov, S. N.: Periodische ZA-Erweiterungen vollständiger Gruppen. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 117—128 (1950) [Russisch].

Sei \mathfrak{G} eine Gruppe und \mathfrak{G}_n die von den n -ten Potenzen der Elemente von \mathfrak{G} erzeugte Gruppe. Bekanntlich heißt \mathfrak{G} vollständig, wenn für jede natürliche Zahl n $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n$ ist. Verf. nennt eine Gruppe \mathfrak{G} schwach vollständig, wenn für jede beliebige Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ unter den Gruppen $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_{n_1} \supset \mathfrak{G}_{n_1 n_2} \supset \dots \supset \mathfrak{G}_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset \dots$ nur endlich viele verschiedene vorkommen. Es zeigt sich nun, daß jede schwach vollständige Gruppe einen vollständigen Normalteiler besitzt, dessen Faktorgruppe periodisch ist, d. h. nur Elemente endlicher Ordnung besitzt, wobei obendrein noch die Ordnungen der Elemente der Faktorgruppe beschränkt sind. Anders ausgedrückt bedeutet dies: die schwach vollständigen Gruppen sind periodische Erweiterungen von vollständigen Gruppen. Eine allgemeine Theorie solcher Gruppen würde zur Zeit noch keine greifbaren Resultate liefern, da weder die Struktur der periodischen noch die der vollständigen Gruppen genügend gut bekannt ist. Verf. beschränkt sich daher auf die Untersuchung solcher Gruppen, bei denen die vollständigen Normalteiler sowohl als auch die Erweiterungen aufsteigende Zentralreihen besitzen (und bezeichnet allgemeine Gruppen mit aufsteigender Zentralreihe als ZA-Gruppen). Der Titel der vorliegenden Arbeit dürfte nunmehr klar sein. — Die Hauptergebnisse bestehen in den folgenden Sätzen: Die Faktoren der oberen Zentralreihe in jeder lokal-unendlichen ZA-Gruppe sind lokal-unendlich. (Dies ist auch kürzlich von A. I. Mal'cev bewiesen worden: dies. Zbl. 34, 17.) Jeder Normalteiler einer lokal-unendlichen ZA-Gruppe, der einer Untergruppe der rationalen Zahlen isomorph ist, liegt im Zentrum. Jedes Element A einer lokal-unendlichen ZA-Gruppe ist isoliert, d. h. die Gleichung $X^n = A$ hat entweder keine oder eine eindeutige Lösung. Daraus folgt, daß der Durchschnitt einer beliebigen Menge von Servanzuntergruppen (in Prüfers Sinne) wieder eine Servanzuntergruppe ist, und daß ein Normalteiler Servanzuntergruppe ist, falls die Faktorgruppe lokal-unendlich ist. Insbesondere sind alle Glieder der oberen Zentralreihe in einer lokal-unendlichen ZA-Gruppe Servanzuntergruppen. — Als Erweiterung eines Elementes A einer Gruppe bezeichnet Verf. die von allen Lösungen aller Gleichungen $X^n = A^m$ für beliebige natürliche Zahlen m, n erzeugte Untergruppe. In einer lokal-unendlichen ZA-Gruppe ist die Erweiterung eines jeden vom Einheitselement verschiedenen Elementes (i) Abelsch und vom Rang 1, (ii) maximal unter den Abelschen Untergruppen vom Rang 1, die das Element enthalten, (iii) auch die Erweiterung jedes anderen in ihr enthaltenen Elementes. Daher haben zwei Erweiterungen entweder alle Elemente oder nur die Einheit gemeinsam. — Wenn eine ZA-Gruppe \mathfrak{G} eine lokal-unendliche normale Servanzuntergruppe \mathfrak{A} mit periodischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ besitzt, so ist \mathfrak{A} direkter Faktor von \mathfrak{G} . Eine vollständige lokal-unendliche ZA-Gruppe ist direkter Faktor in jeder ihrer periodischen ZA-Erweiterungen. Eine ZA-Gruppe ist dann und nur dann schwach vollständig (siehe oben), wenn sie das Produkt von zwei Normalteilern ist, deren einer eine vollständige ZA-Gruppe ist, während der andere eine periodische ZA-Erweiterung einer vollständigen periodischen Abelschen Gruppe mittelst einer periodischen Gruppe mit beschränkten Ordnungen ist. Daraus ergibt sich, daß in einer lokal-unendlichen ZA-Gruppe aus der schwachen Vollständigkeit auf Vollständigkeit geschlossen werden kann. Die Arbeit enthält noch eine ganze Reihe weiterer Sätze und Korollare über periodische ZA-Erweiterungen vollständiger ZA-Gruppen, die wir hier nicht wiedergeben können.

Kurt A. Hirsch.

Gol'fand, Ju. A.: Metaspezielle Gruppen. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 229—248 (1950) [Russisch].

Bezeichne G eine endliche auflösbare Gruppe, $\nu(G)$ einen kleinsten Normalteiler von G mit spezieller Faktorgruppe $G/\nu(G)$ (speziell = nilpotent). Es existiert immer eine abnehmende „spezielle Reihe“ von G : $G = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_t = 1$, wobei

$L_i = \nu(L_{i-1})$ ($i = 1, 2, \dots, l$) gilt. In diesem Falle nennen wir G eine l -stufig metaspezielle Gruppe. Für $l \leq 2$ wird die Gruppe G kurz metaspeziell genannt (für $l = 1$ speziell). Verf. gibt alle Ordnungszahlen, zu denen nur spezielle Gruppen bzw. unter den auflösenden Gruppen nur metaspezielle Gruppen gehören. Es werden zwei Klassen der natürlichen Zahlen definiert. Zur Klasse C_1 gehören die Zahlen, welche keinen Faktor $p^\lambda q$ enthalten, wobei p, q verschiedene Primzahlen sind und $\lambda = \exp p \bmod q$ ist. Zur Klasse C_2 gehören die Zahlen, die keinen Faktor $p^{m(\lambda, r)} q^\mu r$ enthalten, wobei p, q, r Primzahlen sind, außerdem $p \neq q, q \neq r, \lambda = \exp p \bmod q, \mu = \exp q \bmod r$ und $m(\lambda, r) =$ kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von λ, r ist. Die Hauptresultate sind: A) Dann und nur dann sind alle Gruppen von der Ordnung g speziell, wenn g zur Klasse C_1 gehört. B) Dann und nur dann sind alle auflösbaren Gruppen von der Ordnung g metaspeziell, wenn g zur Klasse C_2 gehört. Die Notwendigkeit der Bedingung im Satz A) ergibt sich leicht; zum Beweis, daß sie auch hinreichend ist, wird ein Satz von Tchounikhin (Čunichin) herangezogen (Über die Existenz gewisser Untergruppen von endlichen Gruppen, Trudy Sem. Teorii Grupp, Moskau-Leningrad 1938, 106–125, Satz XII, Korollar 2). Der Beweis von Satz B) geschieht mit Hilfe mehrerer Lemmas. Anwendungen: a) Wenn die Ordnung einer Gruppe G weder durch 2 noch durch die dritte Potenz einer Primzahl teilbar ist, so ist G entweder Abelsch, oder $G = LK$, wobei L, K Abelsch sind und $L \cap K = 1$ (d. h. alle Elemente von G sind in der Form $\lambda \kappa$ darstellbar mit $\lambda \in L, \kappa \in K$). b) Wenn $\alpha, \beta < N$ gilt, so existieren unter den Gruppen von einer Ordnung $p^\alpha q^\beta$ (p, q versch. Primzahlen) nur endlich viele nicht metaspezielle Gruppen. Es wird am Schluß der Arbeit erwähnt, daß aus Satz A) gewisse Sätze von L. Rédei, T. Szele, J. Szép leicht folgen (L. Rédei, dies. Zbl. 35, 15, Satz 9, 10; T. Szele, dies. Zbl. 34, 305; J. Szép, dies. Zbl. 35, 15). *Jeno Szép.*

Serre, J.-P.: Sur un théorème de T. Szele. Acta Sci. math., Szeged 13, 190–191 (1950).

Unter einem Vektorraum soll eine (additive) Abelsche Gruppe verstanden werden, die einen Schiefkörper als Operatorenbereich gestattet. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Einselement des Schiefkörpers identischer Operator ist. Mit Hilfe von Vektorräumen gibt Verf. einen einfachen und sehr eleganten Beweis für den von Ref. herrührenden Satz (dies. Zbl. 35, 17): Dann und nur dann ist jeder Endomorphismus $\neq 0$ einer Abelschen Gruppe G ein Automorphismus, wenn G isomorph zur Additionsgruppe eines Primkörpers ist. — Mit der gleichen Methode zeigt Verf., daß für eine Abelsche Gruppe G folgende vier Aussagen äquivalent sind: 1. G ist ein Vektorraum. 2. Für jedes Paar x, y von Elementen $\neq 0$ in G gibt es einen Automorphismus von G , der x in y überführt. 3. Keine eigentliche Untergruppe von G wird durch jeden Endomorphismus von G in sich abgebildet. 4. G ist eine direkte Summe von beliebig vielen Gruppen, deren jede isomorph zur Additionsgruppe eines und desselben Primkörpers ist. — Bezeichne R einen beliebigen kommutativen Ring mit Einselement. Verf. verallgemeinert beide Sätze folgendermaßen: Dann und nur dann ist jeder R -Endomorphismus eines R -Moduls M ein Automorphismus, wenn M operator-isomorph zur Additionsgruppe des Quotientenkörpers Q eines der zu R homomorphen Integritätsbereiche ist. — Für einen R -Modul M sind folgende vier Aussagen äquivalent: 1. M ist ein Vektorraum bezüglich eines der erwähnten Quotientenkörper Q . 2. Für jedes Paar x, y von Elementen $\neq 0$ in M gibt es einen R -Automorphismus von M , der x in y überführt. 3. Kein eigentlicher R -Untermodul von M wird durch jeden R -Endomorphismus von M in sich abgebildet. 4. M ist eine direkte Summe von beliebig vielen R -Moduln, deren jeder operator-isomorph zur Additionsgruppe eines und desselben Quotientenkörpers Q der erwähnten Art ist. Man sieht unmittelbar, daß die vorigen Sätze als Spezialfälle in den letzteren enthalten sind, indem zum Ring R der Ring der ganzen rationalen Zahlen gewählt wird.

Tibor Szele.

Szele, T. und I. Szélpál: Über drei wichtige Gruppen. Acta Sci. Math., Szeged 13, 192—194 (1950).

Verff. zeigen, daß eine abelsche Gruppe dann und nur dann von allen ihren von Null verschiedenen Endomorphismen auf sich selbst abgebildet wird, wenn sie zyklisch von Primzahlordnung oder vom [Prüferschen] Typ p^∞ oder vom Typ der Additionsgruppe der rationalen Zahlen ist.
Reinhold Baer.

Szép, J. and L. Rédei: On factorisable groups. Acta Sci. math., Szeged 13, 235—238 (1950).

Eine Gruppe G heißt faktorisiertbar mittels der (eigentlichen) Untergruppen H und K , wenn $G = HK$ ist. Im folgenden bezeichnen H, H', \dots Elemente von H und K, K', \dots Elemente von K . Es ist bekannt, daß, wenn für eine endliche Gruppe G die Darstellung $G = HK$ gilt, wobei $H \cap K = E$ ist, jedes Element von G eindeutig in der Form HK oder KH geschrieben werden kann und wenn in der Relation $HK = K'H'$ die Elemente H und K gegeben sind, dadurch eindeutig K' und H' bestimmt werden. Bei gegebenem K beschreibt H' gemeinsam mit H die ganze Gruppe H , so daß jedem K eine Permutation $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix}$ der Elemente von H zugeordnet werden kann. Wenn jedoch $H \cap K \neq E$ ist, dann ist die Darstellung eines Elementes von G in der Form HK (oder KH) nicht mehr eindeutig bestimmt, und wenn in der Relation $HK = K'H'$ K gegeben ist, dann gibt es zu jedem H genau d Elemente H' , wobei d die Ordnung von $H \cap K$ bezeichnet. Verff. beweisen nun, daß auch in diesem Fall jedem K ein System von Permutationen $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix}$ zugeordnet werden kann, und leiten diesbezüglich folgenden Satz ab: Wenn die endliche Gruppe G durch die eigentlichen Untergruppen H und K faktorisiertbar ist, dann gibt es zu jedem K ($\in K$) eine Permutation $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix}$ der Elemente von H , derart daß $HKH'^{-1} \in K$, wobei H ein beliebiges Element von H und H' das ihm in der Permutation $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix}$ entsprechende Element bezeichnet. Wenn $[K]$ das System solcher, dem Element K entsprechenden Permutationen und $[K]$ das aus in allen $[K]$ enthaltenen Permutationen gebildete System ist, so ist $[K]$ eine Gruppe, $[E]$ eine in $[K]$ invariante Untergruppe und jedes System $[K]$ ist eine Nebengruppe von $[E]$. Es besteht ferner der folgende Homomorphismus: $K \sim [K]/[E]$. — Aus diesem Satz leiten Verff. noch folgendes Lemma ab: Wenn die Gruppe K ein Element K ($\neq E$) besitzt, so daß $[K]$ die identische Permutation enthält (d. h. $[K] = [E]$ ist), dann besitzt G eine von E verschiedene invariante Untergruppe N , für die der Isomorphismus $K/N \cong [K]/[E]$ besteht. Dieses Lemma führt zum Satz: Wenn $G = HK$ ist und $H \cap K$ eine in H (oder in K) invariante, vom Einselement verschiedene Untergruppe besitzt, so ist G nicht einfach. Hieraus folgt schließlich als Korollar: Wenn $G = HK$ ist, wobei H und K eigentliche Untergruppen von G , H abelsch und $H \cap K$ von E verschieden ist, so ist G nicht einfach. Rodolfo Permutti.

Szép, J.: On factorisable, not simple groups. Acta Sci. math., Szeged 13, 239—241 (1950).

Verf. beweist die folgenden Sätze bezüglich der endlichen Gruppen, die als Produkt zweier eigentlichen Untergruppen darstellbar sind: 1. Wenn eine endliche Gruppe Produkt von zwei abelschen Untergruppen ist, so ist diese Gruppe nicht einfach. 2. Wenn eine endliche Gruppe Produkt von zwei abelschen Gruppen ist, deren Ordnungen teilerfremd sind, so ist diese Gruppe auflösbar. Satz 2 verallgemeinert einen bereits bekannten Satz (Hölder), nach dem jede endliche Gruppe, die Produkt zweier zyklischer Untergruppen ist, deren Ordnungen teilerfremd sind, auflösbar ist.

Rodolfo Permutti.

Garnir, H.: Sur la détermination des caractères primitifs d'un groupe d'ordre fini. Bull. Soc. Sci. Liège 18, 190—202 (1949).

C_1, \dots, C_n seien die Klassen einer endlichen Gruppe. Mit Hilfe der Koeffizienten c_{ijk} aus $C_i C_j = \sum_k c_{ijk} C_k$ werden die Matrizen $\gamma_r = (c_{irk})$ ($i, r, k = 1, \dots, n$)

betrachtet, und es wird gezeigt, daß sich die $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ simultan auf Diagonalnormalformen transformieren lassen. Aus der simultan transformierenden Matrix können dann die primitiven Charaktere der vorgelegten Gruppen bestimmt werden. Verf. führt die Rechnung an einem Beispiel durch. Georg Reichel.

Piccard, Sophie: Sur les groupes d'ordre fini. Colloques internat. Centie nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 211—215 (1950).

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des groupes d'ordre fini qui est loin d'être résolu dans toute sa généralité est la recherche des bases d'un groupe. Il s'agit des bases minima formées du plus petit nombre possible d'éléments générateurs du groupe. Le nombre des éléments qui constituent une telle base est un invariant du groupe, de même que le nombre total de ses bases. La connaissance des bases d'un groupe facilite la résolution de nombreux problèmes relatifs à ce groupe (recherches de relations caractéristiques, étude des sous-groupes, etc.). L'A. expose différentes méthodes permettant de déterminer le nombre total des bases d'un groupe d'ordre fini. Parmi ces méthodes relevons celle qui consiste à envisager divers groupes associés à une base. Soit $B = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ une base d'un groupe fini G , formée de k éléments, $k \geq 1$; soit S un élément quelconque de G ; soit C_1 le centre de G et soit λ_1 l'ordre de C_1 . Posons

$$B' = S B S^{-1} = \{S A_1 S^{-1}, S A_2 S^{-1}, \dots, S A_k S^{-1}\}.$$

B' est aussi une base de G appelée la transformée de B par S . L'ensemble des éléments S de G , tels que $S B S^{-1} = B$ forme un groupe g_1 qui est le premier groupe associé à la base B . On a $C_1 \subset g_1$. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ la substitution des nombres $1, 2, \dots, k$, telle que $S H_i S^{-1} = A_{i_i}$; $i = 1, 2, \dots, k$. L'ensemble des substitutions σ forme également un groupe g_2 , appelé le second groupe associé à la base B . Le groupe g_1 est λ_1 fois isomorphe à g_2 et toute substitution non identique de g_2 est du second ordre. Lorsque le groupe G est un sous-groupe propre d'un groupe plus vaste Γ , chaque élément de Γ transforme alors toute base de G en une base de G et on peut définir deux nouveaux groupes g_3 et g_4 associés à chaque base de G , relatifs au groupe Γ . Le groupe g_3 est méridiquement isomorphe à g_4 et les substitutions du groupe g_4 peuvent être d'ordre > 2 . — La seconde partie du travail concerne les groupes que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles du même ordre $k \geq 2$ et les bases du groupe symétrique et du groupe alterné dont l'une des substitutions est un cycle d'ordre k . — La dernière partie du travail comprend un théorème général de la théorie des substitutions, notamment: Quels que soient les entiers $m \geq 2$ ($m > 3$) et $n > m$, si G est le groupe symétrique (alterné) des substitutions des éléments $1, 2, \dots, m$, quelle que soit la substitution S des éléments $1, 2, \dots, n$, connexe et primitive avec G , en composant S avec les substitutions de G , on obtient le groupe symétrique \mathfrak{S}_n (le groupe \mathfrak{S}_n si S est impaire et le groupe alterné \mathfrak{A}_n si S est paire). S. Bays.

Tuan, Hsio-Fu: An Anzahl theorem of Kulakoff's type for p -groups. Sci. Rep. nat. Tsing Hua Univ., A 5, 182—189 (1948).

Let G be a group of order p^n and exponent $p^{n-\alpha}$, and let $N(m)$ denote the number of different subgroups of order p^m of G . Then it is known that for $p \geq 3$, $\alpha \geq 1$, $N(m)$ satisfies $N(m) \equiv 1 + p \pmod{p^2}$ ($0 < m < n$) [cf. e. g. P. Hall, Proc. London math. Soc., II. S. 36, 29—95 (1933); this Zbl. 7, 291]. The author considers $N(m)$ modulo p^3 , showing that for $p \geq 3$ and $n \geq m \geq 2\alpha + 1$ $N(m) \equiv 1$, or

$1 + p$, or $1 + p + p^2$, or $1 + p + 2p^2 \bmod p^3$. The proof combines a result of P. Hall (loc. cit. Theorem 1.61) with results by L. K. Hua [Sci. Rep. nat. Tsing-Hua Univ., A 4, 313—327 (1947)] on the number $N(m, \rho)$ of different subgroups of order p^m and exponent $p^{m-\rho}$ of G . — In the second part the author proves two theorems which together represent a re-statement and independent proof of Hua's basic result (loc. cit., Theorem 1.): (1) If again $p \geq 3$ and $n \geq 2\alpha + 1$, then the p^α -th powers of elements of G form a subgroup G^{p^α} ; G^{p^α} is cyclic, generated by the p^α -th power of any element of maximum order $p^{n-\alpha}$ of G , and belongs to the centre of G . (2) The order of any element of the commutator group $[G, G] = G'$ divides p^α , and the order of any element of $[G, G']$ divides $p^{\alpha-1}$. Besides, for any two elements g_1, g_2 of G , one has $g_1^{p^\alpha} g_2^{p^\alpha} = (g_1 g_2)^{p^\alpha}$.
Hanna Neumann.

Murnaghan, Francis D.: The element of volume of the rotation group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 670—672 (1950).

Jede Drehung D des R_n um den Koordinatenanfangspunkt läßt sich als Aufeinanderfolge von $n(n-1)/2$ Drehungen, bei denen sich nur je zwei Koordinaten ändern, darstellen. Dabei treten $n-1$ Drehwinkel φ_i ($-\pi \leq \varphi_i < \pi$, analog Eulers φ und ψ) und $q = (n-1)(n-2)/2$ Drehwinkel ϑ_i ($0 \leq \vartheta_i \leq \pi$, analog Eulers ϑ) auf. Verf. gibt das Volumenelement der Gruppe der Drehungen D als Produkt der Differentiale der Drehwinkel mit dem Ausdruck

$$\sin \vartheta_1 (\sin^2 \vartheta_2 \sin \vartheta_3) (\sin^3 \vartheta_4 \sin^2 \vartheta_5 \sin \vartheta_6) \cdots (\sin^{n-2} \vartheta_p \cdots \sin \vartheta_q)$$

an, worin $p = (n-2)(n-3)/2 + 1$ ist. Die Volumelemente der Lorentz- und der Quasilorentzgruppen ergeben sich daraus durch Ersetzung einiger \sin durch \sinh . Für die Herleitung verweist Verf. auf sein Buch „Lectures on matrices and matrix groups“, das in Rio de Janeiro erscheinen wird.
Gustav Lochs.

Siegel, Carl Ludwig: Bemerkung zu einem Satze von Jakob Nielsen. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 66—70 (1950).

Nielsen bewies 1940 einen Satz über Gruppen gebrochener linearer Substitutionen, die das Innere des Einheitskreises in sich überführen, und verallgemeinerte ihn später zusammen mit Fenchel (dies. Zbl. 34, 381). Die Beweise verlaufen geometrisch. Verf. fand schon 1940 den vorliegenden einfachen algebraischen Beweis des Satzes und seiner Verallgemeinerung, bei dem der Einheitskreis auf die obere Halbebene abgebildet und mit den jetzt reellen Matrizen der Gruppenelemente gearbeitet wird.
Gustav Lochs.

MacLane, Saunders: Cohomology theory in abstract groups. III. Operator homomorphisms of kernels. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 736—761 (1949).

Bezeichnungen wie in Teil I und II dieser Arbeit (zitiert als C I und C II; vgl. dies. Zbl. 29, 340 u. 341). Jeder Q -Kern (K, Θ) mit dem Zentrum H (vgl. C II) bestimmt eine exakte Gruppenfolge $\mathfrak{S}: H \xrightarrow{\lambda} K \xrightarrow{\mu} F \xrightarrow{\nu} Q$ und einen Homomorphismus $\eta: F \rightarrow A(K)$ [$A(K)$ = Automorphismengruppe von K]. Hierbei ist F der „Graph“ des Kernes, d. h. die Untergruppe des direkten Produktes $Q \times A(K)$, die aus den Elementen (x, α) mit $x \in Q, \alpha \in \Theta(x)$ besteht; λ ist der Einbettungsisomorphismus, $\mu(k) = (1, C(k))$ [$k \in K; C(k)$ = von k induzierter innerer Automorphismus von K], $\nu(x, \alpha) = x$ und $\eta(x, \alpha) = \alpha$. Es gilt hierbei $\eta\mu(k) = C(k)$ für alle $k \in K$. Es wird zunächst gezeigt, daß die Theorie der Q -Kerne mit Zentrum H äquivalent ist der Theorie derjenigen exakten Gruppenfolgen \mathfrak{S} mit Homomorphismus η , die mit H beginnen und mit Q endigen, wobei λH das Zentrum von K ist und $\eta\mu(k) = C(k)$ ist. Es werden diese Folgen (\mathfrak{S}, η) untersucht. Ebenso wie die Q -Kerne mit Zentrum H bestimmen sie eine charakteristische Kohomologieklass $\{ \lambda^3 \} \in H^3(Q, H)$ (vgl. C II). Sei G eine abelsche Gruppe mit Operatoren aus Q . Vermöge $\nu: F \rightarrow Q$ können dann Operatoren aus F für G erklärt werden. Vermöge η sind auch Operatoren aus F für K erklärt und daher auch Operatorhomomorphismen von K in G . Ein verschränkter Homomorphismus von F in G ist eine Funktion $\tau(a) \in G$, die für $a \in F$ erklärt ist, mit $\tau(ab) = \tau(a) + a \cdot \tau(b)$. Jeder verschränkte Homomorphismus $\tau: F \rightarrow G$ induziert einen Operatorhomomorphismus $\tau\mu: K \rightarrow G$. Es wird die Faktorgruppe $\text{Map}(\mathfrak{S}, \eta, G)$ der Gruppe aller Operatorhomomorphismen von K in G nach der Untergruppe der von den verschränkten Homomorphismen τ induzierten Operatorhomomorphismen betrachtet. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Satz, daß unter der Voraus-

setzung einer freien Gruppe F $\text{Map}(\mathfrak{S}, \eta, G)$ nur abhängt von den Gruppen G (mit Operatoren), H und Q , der (durch η induzierten) Operationsweise von Q auf H und der Kohomologiekategorie $\{3\}$. Genauer ist (bei freier F) $\text{Map}(\mathfrak{S}, \eta, G)$ isomorph zu der von Eilenberg und Verf. [Trans. Amer. math. Soc. **65**, 49 (1949); dies. Zbl. **34**, 111] konstruierten Gruppe $E^2(Q, H, \mathfrak{I}^3, G)$. In diesem Satz ist als Spezialfall ($H = 0$) unter einer gewissen Einschränkung für R der Satz enthalten: Bei einer Darstellung $Q = F/R$ durch Erzeugende und Relationen ist die Faktorgruppe $\text{Map}(R, F; G)$ der Gruppe der Operatorhomomorphismen von R in G nach der Untergruppe der von den verschränkten Homomorphismen von F in G induzierten Operatorhomomorphismen isomorph mit $H^2(Q, G)$. Auf Grund der Deutung von $H^2(Q, G)$ in der Erweiterungstheorie der Gruppen (vgl. C I) liefert dieser Satz für eine durch Erzeugende und Relationen gegebene Gruppe Q eine Darstellung der Gruppe der Gruppenerweiterungen von G mit Q , bei denen Q in der vorgegebenen Weise auf G operiert. Er ist im wesentlichen der nulldimensionale Fall des Cupprodukt-Reduktionstheorems aus C I und wird in der vorliegenden Arbeit — nach dem Schema des früheren Beweises jenes Reduktionstheorems — zunächst bewiesen. Mittels dieses Spezialfalles und einer Modifikation der Cupprodukt-Reduktion wird dann der allgemeine Satz bewiesen. Der Spezialfall ist bekanntlich (vgl. C I) die „Kohomologie“-form des Hopfschen Satzes, daß $(R \cap [F, F])/[R, F]$ nur von $Q = F/R$ abhängt. Ebenso gibt Verf. von dem allgemeinen Satz eine zugehörige „Homologie“-form. — Diese rein algebraischen Konstruktionen besitzen topologische Anwendungen: Sei P ein zusammenhängendes Polyeder, das nicht eindimensional ist, P^1 sein 1-Gerüst in einer hinreichend feinen Triangulation. Dann bildet die Homotopiefolge $\mathfrak{S}: \pi_2(P) \rightarrow \pi_2(P, P^1) \rightarrow \pi_1(P^1) \rightarrow \pi_1(P)$ zusammen mit dem in üblicher Weise erklärten $\eta: \pi_1(P^1) \rightarrow A[\pi_2(P, P^1)]$ eine Folge (\mathfrak{S}, η) , wie sie oben betrachtet wurde. Während jedoch diese Folge keine Invariante von P ist, erweist sich die Kohomologiekategorie $\{3\} \in H^3(\pi_1, \pi_2)$ als mit der Eilenberg-MacLaneschen Homotopieinvarianten k^3 von P identisch (dies. Zbl. **34**, 111). Ferner ist nach derselben Arbeit von Eilenberg und Verf. $E^2(\pi_1, \pi_2, k^3, G) \cong H^2(P, G)$. Da $\pi_1(P^1)$ frei ist, ergibt sich also die Isomorphie $H^2(P, G) \cong \text{Map}(\mathfrak{S}, \eta, G)$.

Ewald Burger.

Godement, Roger: L'analyse harmonique dans les groupes non abéliens. Suppl. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. **15** (Analyse harmonique, Nancy 15.—22.6.1947), 1—16 (1949).

Es werden hier einige vorhandene Resultate, ungelöste Fragen, verschiedene Vermutungen und Hinweise zusammengestellt. 1949 wurde die Darstellung, die von 1947 stammt, mit einigen Fußnoten versehen, die sich auf die inzwischen durch Verf. und andere erzielten Fortschritte beziehen. Es wird der Zusammenhang zwischen harmonischer Analyse in lokal kompakten Gruppen und deren unitären Darstellungen betont. Die Theorie der Fourierschen Transformation in direkten Produkten abelscher und kompakter Gruppen wird näher behandelt. Am Schluß finden sich einige Bemerkungen über Verallgemeinerungen des Begriffes der Spur eines Operators.

Tudor Ganea.

Grabár, L. P.: Ein Satz über bikompakte Gruppen. Mat. Sbornik, n. S. **27** (69), 139—142 (1950) [Russisch].

Le théorème en question affirme que, si G est un groupe compact et U un voisinage de e dans G , U contient un sous-groupe invariant fermé N tel que G/N soit un groupe séparable. N est obtenu comme ensemble des $a \in G$ tels que $f(xay) = f(xy)$ quels que soient $x, y \in G$, où f est une fonction continue sur G , nulle en e (élément unité de G) et égale à 1 sur $G - U$. — L'A. dit (ce qui est bien entendu exact, et même évident) que son théorème permet d'étendre aux groupes non séparables des propriétés des groupes séparables; en fait, l'expérience montre que, quand il s'agit de groupes compacts, on peut toujours démontrer directement les théorèmes pour des groupes non séparables (et même on doit le faire!). Cela permet du reste de donner du résultat de l'A. une autre démonstration, basée sur le fait qu'un groupe compact a un système complet de représentations de dimension finie; il est clair dès lors que le groupe G/N dont parle l'A. peut être supposé non seulement séparable, mais de Lie!

Roger Godement.

Verbände. Ringe. Körper:

Kořinek, Vladimír: Le théorème de Jordan Hölder dans les treillis. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. **24** (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 155—157 (1950).

Bericht über die Gültigkeit des Jordan-Hölderschen Satzes und der Zassenhausschen Formel in Verbänden. Wenn alle von a nach b absteigenden Ketten (a, b beliebig) endlich sind sind, so ist für beide Aussagen die Semimodularität des Verbandes die notwendige und hinreichende Bedingung. In Verbänden ohne Endlichkeitsbedingung gilt der Schreiersche Verfeinerungssatz in der Zassenhausschen Form dann und nur dann, wenn der Verband modular ist. — Bezüglich der Beweise wird auf des Verf. Arbeit: Vestn. Kralovské České Spol. Nauk 1941, Nr. 14, 1—28 (1942), dies. Zbl. 26, 387 und auf eine bevorstehende Publikation in Acad. Tchèque Sci., Bull. internat., Cl. Sci. math. natur. Méd. (1949) verwiesen. *F. W. Levi.*

Nachbin, Leopoldo: On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring. *Fundam. Math.*, Warszawa 36, 137—142 (1949).

Es sei S ein \cup -Verband (geordnete Menge, abgeschlossen für die Operation \cup) bzw. R ein Boolescher Verband. Eine Teilmenge I von S bzw. R heißt ein Ideal in S bzw. R , wenn gilt: a) aus $x \in S$ bzw. R , $y \in I$, $x \subseteq y$, folgt $x \in I$, b) I ist abgeschlossen für \cup . Verf. untersucht die Klassifikation des Verbandes \mathfrak{S}_S bzw. \mathfrak{S}_R aller Ideale in S bzw. R . Zuerst zwei Begriffe, die wir unten benutzen: Ein Element x eines Vollverbandes L heißt kompakt, wenn für jedes nicht leere System $(x_i) \in L$ mit $x \subseteq \bigcup_i x_i$ ein endliches nicht leeres Untersystem (x_{i_t}) existiert, so daß $x \subseteq \bigcup_{t=1}^n x_{i_t}$ gilt. Ein Element x eines Verbandes L heißt \cap -irreduzibel in L , wenn aus $x_1, x_2 \in L$, $x_1 \cap x_2 = x$ folgt: entweder $x_1 = x$ oder $x_2 = x$. — Verf. zeigt: Ein nicht leerer Verband L ist isomorph zu \mathfrak{S}_S , wenn und nur wenn 1. L ein Vollverband ist, 2. jedes Element in L die Vereinigung aller kompakten Elemente ist, die es enthält, bzw. zu \mathfrak{S}_R , wenn und nur wenn 1. und 2. gelten und außerdem: 3. wenn $x, y \in L$ kompakt, dann $x \cup y$ auch kompakt, 4. jedes \cap -irreduzible Element in L , das verschieden vom Einheitsselement von L ist, ist ein duales Atom. Weitere Beziehungen zwischen der algebraischen Struktur von L und S bzw. R werden von Verf. untersucht, wenn L zu \mathfrak{S}_S bzw. \mathfrak{S}_R isomorph ist.

Demetrios A. Kappos.

● **Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. VII. Pt. I: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre III: Algèbre multilinéaire.** (Actualités scientifiques et industrielles, No. 1044.) Paris: Hermann & Cie. 1948. 157 p.

Von wenigen, ausdrücklich hervorgehobenen Ausnahmen abgesehen werden durchweg Moduln mit kommutativen Operatorenringen betrachtet. Grundlegend ist der Begriff des Tensorprodukts, der seiner Wichtigkeit wegen ausführlich besprochen werden soll. Es seien E_1, E_2 zwei A -Moduln; $E_1 \times E_2$ sei der Modul aller Paare (c_1, c_2) mit $c_i \in E_i$ ($i = 1, 2$), unter

$(E_1 \times E_2)$ möge der A -Modul aller formalen Linearverbindungen $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$ ($\alpha_i \in A, d_i \in E_1 \times E_2$)

verstanden werden. Eine lineare Abbildung $\varphi(u)$ [$u \in (E_1 \times E_2)$, $\varphi(u) \in F$] von $(E_1 \times E_2)$ in einen A -Modul F heißt bilinear, wenn die Bedingungen:

$$(1) \quad \varphi((c_1 + c'_1, c_2)) = \varphi((c_1, c_2)) + \varphi((c'_1, c_2)); \quad \varphi((c_1, c_2 + c'_2)) = \varphi((c_1, c_2)) + \varphi((c_1, c'_2));$$

$$(2) \quad \varphi((\alpha \cdot c_1, c_2)) = \alpha \cdot \varphi((c_1, c_2)); \quad \varphi((c_1, \alpha \cdot c_2)) = \alpha \cdot \varphi((c_1, c_2))$$

erfüllt sind. Die Elemente $c_{12} \in (E_1 \times E_2)$ mit der Eigenschaft, daß $\varphi(c_{12}) = 0$ bei jeder bilinearen Abbildung $\varphi(u)$ bilden einen Untermodul N_{12} von $(E_1 \times E_2)$. Der Restklassenmodul $(E_1 \times E_2)/N_{12} = E_1 \otimes E_2$ wird als das tensorielle Produkt von E_1 und E_2 bezeichnet. — Zur Veranschaulichung werde ein Beispiel aus § 2, Aufgabe 5 betrachtet: Es sei $A = K[x, y]$ der Polynomring in den Unbestimmten x, y über dem Körper K , und es sei E das Ideal (x, y) aus A . Dann gehört in $(E \times E)$ das Element $x \cdot y \cdot (x, y) - x \cdot y \cdot (y, x)$ zu N_{12} , weil wegen (2) stets $\varphi(x \cdot y \cdot (x, y)) = \varphi(y \cdot x \cdot (x, y)) = \varphi(x \cdot y \cdot (y, x))$. Andererseits liegt, wie leicht zu sehen, $(x, y) - (y, x)$ nicht in N_{12} , weil der Restklassenring E/F von E nach dem A -Ideal $F = (x^2, xy, y^2)$ ein zweidimensionaler Vektorraum über K wird. Ebenso wie man über die bilineare Abbildung zu $E_1 \otimes E_2$ kommt, gewinnt man mit Hilfe des Begriffs der multilinearen Abbildung das Tensorprodukt $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ von endlich vielen A -Moduln. — Anschließend an die allgemeinen Definitionen wird in § 1 speziell das Tensorprodukt von Moduln mit endlicher Basis und von direkten Summen, sowie das Verhalten des Tensorprodukts bei Restklassenbildung untersucht. Hervorgehoben sei ein Hauptsatz über das Tensorprodukt von linearen Abbildungen: Es seien E_i, F_i ($i = 1, 2$) zwei Paare von A -Moduln, $L(E, F)$ bedeute allgemein den A -Modul aller linearen Abbildungen von E in F . Dann sind $L(E_1, F_1) \otimes L(E_2, F_2)$ und $L(E_1 \otimes E_2,$

$F_1 \otimes F_2$) zwar keineswegs immer isomorph, wohl aber sicher dann, wenn alle auftretenden Moduln unitär sind und endliche Basen haben. Aus diesem wichtigen Theorem folgt insbesondere: Bedeutet E^* stets das Dual von E , und sind E_1, E_2 unitäre Moduln mit endlichen Basen, so lassen sich, kurz gesagt, die Moduln $E_1^* \otimes E_2^*$ und $(E_1 \otimes E_2)^*$ identifizieren. — In § 2 wird die Erweiterung des Operatorringes A eines Moduls E zu einem Oberring B durchgeführt, wobei B ausnahmsweise nicht kommutativ zu sein braucht, aber A im Zentrum von B enthalten sein muß. Der entstehende Modul E_B läßt sich auffassen als das mit der Struktur eines B -Moduls versehene Tensorprodukt $E \otimes B$ der A -Moduln E, B . Ausführlich behandelt wird der Spezialfall, daß A einen Integritätsbereich, B seinen Quotientenkörper darstellt. In einer längeren Übungsaufgabe wird untersucht, wie weit man sich beim Erweiterungsproblem von jeder Kommutativitätsvoraussetzung freimachen kann. — In § 3 wird gezeigt, daß sich das Tensorprodukt zweier Algebren stets selbst als Algebra auffassen läßt, und es werden Kriterien dafür angegeben, daß eine Algebra das Tensorprodukt von Unteralembren darstellt. — Ist E ein Vektorraum endlicher Dimension m über einem Körper K , so ist das n -malige Tensorprodukt von E mit sich selbst einfach der Modul aller Multilinearformen in n Variablenreihen $x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) über K . Es erscheint daher ohne weiteres verständlich, wenn in § 4 allgemein als l -fach kovarianter und m -fach kontravarianter Tensor über dem A -Modul E ein Element aus $E_1 \otimes \dots \otimes E_{l+m}$ ($E_1 = \dots = E_l = E, E_{l+1} = \dots = E_{l+m} = E^*$) eingeführt wird. Für die so definierten Tensoren läßt sich dann auf Grund der Endomorphismen von E die Transformationstheorie entwickeln, und man kann die Begriffe der Tensormultiplikation und der Faltung in üblicher Weise einführen. Endomorphiebetrachtungen führen ferner speziell auf die gemischten Tensoren zweiter Stufe und von dort zu dem wichtigen Begriff der Spur eines Endomorphismus bzw. einer Matrix. Den Schluß von § 4 bilden Bemerkungen über die aus allen Produkten $E_1 \otimes \dots \otimes E_{l+m}$ ($E_1 = \dots = E_l = E, E_{l+1} = \dots = E_{l+m} = E^*$; $l = 0, 1, \dots; m = 0, 1, \dots$) ableitbare Tensoralgebra. In den Übungsaufgaben findet sich eine Anleitung zur näheren Untersuchung dieser Algebra für den Fall, daß E einen endlichdimensionalen Vektorraum über einem Körper darstellt. Mit § 5 beginnt der zweite, den „äußeren“ Produktbildungen gewidmete Teil des Werkes. Nachdem in sehr allgemeiner Fassung der Begriff der Antisymmetrisierung eingeführt ist, werden zunächst alternierende multilineare Funktionen und Abbildungen, vor allem auch im Spezialfall eines freien Ausgangsmoduls E , näher untersucht. Auf diese Betrachtungen

stützt sich dann die grundlegende Definition der p -ten äußeren Potenz $\bigwedge^p E$ eines Moduls. $\bigwedge^p E$ entsteht aus $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ ($E_1 = \dots = E_p = E$) dadurch, daß man zum Restklassenmodul nach M übergeht, wobei M den kleinsten Untermodul von $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ bedeutet, der alle Produkte $x_1 \otimes \dots \otimes x_p$ mit mindestens zwei gleichen Faktoren enthält [$x_1 \otimes \dots \otimes x_p$ ist dabei natürlich das durch (x_1, \dots, x_p) aus $(E_1 \times \dots \times E_p)$ definierte Element von $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$].

Ist E ein freier Modul, besitzt also E eine Basis, so ist $\bigwedge^p E$ isomorph zum Untermodul aller in üblicher Weise antisymmetrisierten Tensoren aus $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$. Man darf daher in diesem Falle die Elemente von $\bigwedge^p E$, die p -Vektoren, einfach mit den antisymmetrisierten Tensoren

p -ter Stufe identifizieren. Unter Heranziehung von $\bigwedge^{p_1+p_2} E$ kann weiter das äußere Produkt eines p_1 -Vektors mit einem p_2 -Vektor definiert werden, und es läßt sich der Tensoralgebra von § 4 eine äußere Algebra gegenüberstellen. Unter den Aufgaben zu § 5 seien vor allem die zahlreichen Beispiele hervorgehoben, an denen die Bedeutung der äußeren p -Potenz veranschaulicht wird. Man beachte insbesondere die interessanten „Gegenbeispiele“ für Charakteristik 2 in Aufgabe 5 und 6. — In § 6 wird die Determinantentheorie entwickelt. Noch in § 5 war gezeigt worden, daß jeder linearen Abbildung u des A -Moduls E in den A -Modul F eindeutig eine Ab-

bildung u_p von $\bigwedge^p E$ im $\bigwedge^p F$ zugeordnet werden kann, die als die p -te äußere Potenz von u bezeichnet wird. Es sei nun E ein Modul mit n -gliedriger Basis, u ein Endomorphismus von E ;

dann hat $\bigwedge^n E$ eine eingliedrige Basis, und es besteht daher u_n einfach in der Multiplikation aller n -Vektoren aus $\bigwedge^n E$ mit einem festen $d \in E$. Dieses d wird als die Determinante von u bezeichnet. Durch Spezialisierung dieser allgemeinen Definition kommt man sofort zur Determinante einer quadratischen Matrix im üblichen Sinne, mit dem Vorteil, daß der Multiplikationssatz der Determinanten eine begriffliche Selbstverständlichkeit wird. Es ergeben sich weiter leicht die bekannten Grundeigenschaften der Determinanten, vor allem der Laplacesche Entwicklungssatz, und man erhält einen sehr durchsichtigen Beweis des Theorems, daß das System

$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_k = c_k$ ($i = 1, \dots, n$) über einem kommutativen Ring \mathfrak{K} mit Einselement dann und nur dann bei beliebiger Vorgabe der c_k (und festen a_{ik}) lösbar ist, wenn $|a_{ik}|$ eine Einheit aus \mathfrak{K} darstellt. — In § 7 werden lineare Vektorräume endlicher Dimension über kommutativen Körpern betrachtet, und es werden die bekannten Sätze über den Zusammenhang zwischen linearen

Unterräumen und p -Vektoren hergeleitet. — § 8 behandelt für unitäre Moduln mit endlicher Basis

die Dualität in der äußeren Algebra. (Dual von $\bigwedge^p E$; inneres Produkt eines p -Vektors und einer q -Form; kanonischer Isomorphismus zwischen p -Vektoren und $(n-p)$ -Formen; Anwendung auf die Geometrie der Vektorräume). Es handelt sich, kurz gesagt, um eine sehr allgemein gefaßte Formulierung der Zusammenhänge, die am anschaulichsten im n -dimensionalen projektiven Raum in Erscheinung treten, wenn man beachtet, daß dort die $(n-r)$ -dimensionalen linearen Punktunterräume stets gleichzeitig als $(r-1)$ -dimensionale Ebenenunterräume aufgefaßt werden können. Unter den Aufgaben von § 8 sei von einer ersten Gruppe geometrischen Charakters vor allem Nr. 6 hervorgehoben. (Elegante Charakterisierung der über einem Vektorraum zerlegbaren p -Vektoren.) Eine zweite Aufgabengruppe wendet das Dualitätsprinzip auf Identitäten zwischen den Minoren einer Determinante an und führt so in den Gedankenkreis des Sylvesterschen Satzes ein. — In einem ersten, sehr kurzen Anhang wird die Möglichkeit der Definition des Tensorprodukts bei unendlich vielen Komponenten E_α gezeigt. Anhang II führt ohne Kommutativitätsvoraussetzung über den Begriff des Bimoduls bis zur Definition des Tensorprodukts $E \otimes F$ eines A -Linksmoduls E mit einem B -Rechtsmodul F . In den Aufgaben finden sich originelle Beispiele von Bimoduln, bei denen beide Operatorringe kommutative Körper sind. In Anhang III werden die abstrakten Grundgedanken, die — von Beispielen aus früheren Kapiteln abgesehen — dem Aufbau von § 1, § 2, § 5 des vorliegenden Kapitels in gleicher Weise zugrunde liegen, für allgemeine abstrakte Strukturen formuliert. Eine Fülle von Anregungen bietet die beigefügte historische Übersicht über die Entwicklung der linearen Algebra von den ersten Ansätzen bei Leibniz, Fermat, Descartes bis zum heute erreichten Standpunkt.

Wolfgang Krull.

♣ Krasner, Marc: Généralisation abstraite de la théorie de Galois. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25.9. — 1.10.1949), 163—168 (1950).

Der vorliegende Vortrag enthält eine Darlegung einer sehr weitgehenden Verallgemeinerung der Galoisschen Theorie. Diese Theorie wurde vom Verf. zum ersten Male in seiner Arbeit „Une généralisation de la notion de corps“ [J. Math. pur. appl. 17. 367—385 (1938); dies. Zbl. 20. 200] veröffentlicht. Seitdem sind neue Resultate hinzugekommen. Eine ähnliche Theorie ist von J. S. e Silva [Comment. Pontificia Acad. Sci., Roma 9. 327—353 (1945)] ausgearbeitet worden. — Es wird eine Menge E mit auf ihr definierten Relationen und die Permutationsgruppe von E , die diese Relationen festläßt, betrachtet. Eine Relation ist dabei folgendermaßen definiert: Sei U eine Hilfsmenge von einer Mächtigkeit, die nicht kleiner ist als die von E . Eine Abbildung P von U in E soll ein U -Punkt heißen. Eine Relation r ist eine Einteilung der U -Punkte in zwei elementfremde Klassen $D(r)$ und $D(r)$. Die Menge E mit einem gegebenen Relationsbereich R bezeichnet man als eine Struktur (E, R) . Für die Relationen werden gewisse Verknüpfungsoperationen definiert, die im wesentlichen auf eine Verallgemeinerung des Aussagenkalküls hinauslaufen. Relationsbereiche, die bez. dieser Operationen abgeschlossen sind, nennt man logisch abgeschlossen. Den eindeutig bestimmten kleinsten logisch abgeschlossenen Bereich R_r , der einen gegebenen Relationsbereich $R = \{r\}$ enthält, bezeichnet Verf. als die logische Abschließung von R . Zwei Strukturen (E, R) und (E, R') werden als äquivalent betrachtet $[(E, R) \sim (E, R')]$, wenn $R_r = R'_r$ ist. — Läßt eine Permutation von E den Relationsbereich R einer Struktur $s = (E, R)$ elementweise fest, so bleibt für sie auch die logische Abschließung R_r invariant. Die Gruppe aller Permutationen, die R elementweise festlassen, heißt die Galoissche Gruppe der Struktur S und wird mit $G_{E, S}$ bezeichnet. — Es gelten die beiden Fundamentalsätze: 1. Zu jeder Permutationsgruppe G von E gibt es eine Struktur S , so daß $G = G_{E, S}$ ist; 2. Zwei Strukturen S und S' sind dann und nur dann äquivalent, wenn $G_{E, S} = G_{E, S'}$ ist. — Einen Abstraktkörper $K(S)$ nennt Verf. das Gedankenobjekt, das eine Klasse äquivalenter Strukturen $\{S\}$ repräsentiert. Die Galoisschen Gruppen der Strukturen sind eineindeutig den entsprechenden Abstraktkörpern zugeordnet. — Verf. spricht von einem Multiplizitätskörper, wenn es sich um einen Abstraktkörper handelt, dessen entsprechende Strukturen Relationen enthalten, die genau von einem Element von E erfüllt werden. (Solche Elemente

bleiben bei allen Permutationen der Galoisschen Gruppe fest.) Die Menge solcher Elemente bei dem Abstraktkörper logisch abgeschlossener Strukturen heißt der Rationalitätsbereich der Multiplizitätskörpers. — Die beiden Hauptprobleme der Galoisschen Theorie der Multiplizitätskörper sind: 1. Die Bestimmung der Rationalitätsbereiche; 2. Die Bestimmung der Galoisschen Gruppen der Multiplizitätskörper. Das erste Problem ist für eine umfassende Klasse von Multiplizitätskörpern lösbar, für sog. eliminative Strukturen. — Verf. zeigt im einzelnen, wie das erste Hauptproblem in der klassischen Galoisschen Theorie endlicher Körpererweiterungen von seinem allgemeineren Standpunkt aus gelöst werden kann. Als weitere Beispiele analoger Theorien erwähnt Verf. die Galoisschen Theorien der Korpoide (ein Korpoid ist eine Verallgemeinerung des Körpers, bei dem zwei beliebige Elemente nicht notwendig addierbar sind; ein Beispiel eines Korpoids bildet die Menge der multiplikativen Restklassen eines bewerteten Körpers. Die Galoissche Theorie der Korpoide ist vom Verf. weitgehend ausgearbeitet und auf die Erweiterungstheorie vollständiger bewerteter Körper angewandt worden), der Algebren, der Differentialgleichungen (Theorie von Picard-Vessiot) und einiger weiteren Strukturen. Es handelt sich bei allen diesen Theorien um Galoissche Theorien von Multiplizitätskörpern.

Leo Kaloujnine.

Apéry, R.: *Quelques propriétés des anneaux.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25.9.—1.10.1949), 107—108 (1950).

Die Arbeit enthält zahlreiche Definitionen und einige sie verknüpfende Sätze, die sich alle auf heterogene (graduierete) Ringe beziehen. Ein heterogener Ring ist dabei folgendermaßen definiert: Er besteht aus einer Menge von Elementen, die in gewisse Äquivalenzklassen zerfällt und in der eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind. Die Addition ist jedoch nur innerhalb jeder einzelnen Äquivalenzklasse ausführbar, und die Äquivalenzklassen bilden ihr gegenüber abelsche Gruppen. Die Multiplikation hingegen ist zwischen allen Elementen erklärt. Sie ist kommutativ, assoziativ und distributiv. Ferner wird von der Multiplikation gefordert, daß sie mit der Äquivalenzrelation verträglich ist und ihre Übertragung auf die Äquivalenzklassen diese zu einer abelschen Gruppe macht. Verf. gibt eine Aneinanderreihung von Definitionen, die sich auf Ideale in heterogenen Ringen beziehen und wesentlichen Gebrauch von dem Idealquotienten machen. Die ohne Beweise angeführten Sätze stellen Zusammenhänge zwischen diesen Definitionen her. Auf eine Wiedergabe der Sätze muß verzichtet werden, weil ihre Formulierung nur mit Hilfe fast aller Definitionen möglich wäre. Als vornehmliches Beispiel für heterogene Ringe wird die Menge aller homogenen Polynome in n Veränderlichen über einem Körper angeführt. Für diesen Spezialfall werden weitere Definitionen und ein Satz angegeben.

Hans Joachim Kowalsky.

Brown, Bailey und Neal H. McCoy: *Some theorems on groups with applications to ring theory.* Trans. Amer. math. Soc. 69, 302—311 (1950).

Les AA. unifient les diverses notions de „radical“ d'un anneau (associatif ou non) en les faisant rentrer dans le schéma général suivant. Soit G un groupe (abélien ou non) noté additivement, Ω un ensemble d'endomorphismes de G contenant les automorphismes intérieurs; pour tout $a \in G$, $\langle a \rangle$ est le sous-groupe de G stable pour Ω , engendré par a . On suppose donnée une application F de G dans l'ensemble des sous-groupes (non nécessairement stables) de G telle que: I. $F(a + b) \subset F(a) + (b)$; II. Si $b \in F(a)$, alors $F(a + b) \subset F(a)$. On dit que $a \in G$ est F -régulier si $a \in F(a)$, et qu'un sous-ensemble de G est F -régulier si tous ses éléments le sont. Les AA. prouvent alors qu'il existe un plus grand sous-groupe Ω -stable et F -régulier N de G , qui possède la plupart des propriétés formelles d'un radical. Si par exemple, dans un anneau associatif G , $F(a)$ désigne l'ensemble des éléments $ax - x$, où x parcourt G , N est le radical de G au sens de Jacobson; les AA. indiquent de nombreux

autres exemples, empruntés à la théorie des anneaux (associatifs ou non). Une généralisation plus compliquée donne l'analogie formel de la notion d'anneau primitif au sens de Jacobson.

Jean Dieudonné.

Szendrei, J.: On the extension of rings without divisors of zero. *Acta Sci. math.*, Szeged **13**, 231—234 (1950).

Ist R ein beliebiger Ring ohne Nullteiler, so zeigt Verf., daß es genau einen Ring \bar{R} mit Einselement gibt, der keine Nullteiler enthält und der eine kleinste Erweiterung von R ist.

Georg Reichel.

Hall jr., Marshall: A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups. *Proc. Amer. math. Soc.* **1**, 575—581 (1950).

Die Bedeutung dieser Untersuchung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen freien Gruppen und freien Lieschen Ringen. Für einen freien Lieschen Ring mit den Erzeugenden x_1, \dots, x_q wird eine linear unabhängige Basis U aus gewissen Monomen u_i rekursiv definiert. Dabei sind die u_i so numeriert, daß $i < j$, falls $\text{Grad } u_i < \text{Grad } u_j$. Für $i \leq q$ wird $u_i = x_i$ genommen. Der Kommutator $[u_k, u_l]$ wird genau dann in U aufgenommen, wenn 1. $k < l$, 2. im Falle $u_k = [u_i, u_j]$ noch $j \geq l$ erfüllt ist. — In etwas anderer Fassung hat Ref. diesen Satz bereits 1942 an der Universität Berlin vorgetragen.

Ernst Witt.

Nagata, Masayoshi: On the structure of complete local rings. *Nagoya math. J.* **1**, 63—70 (1950).

Für einen Noetherschen Stellenring \mathfrak{R} (also einen kommutativen Ring mit Einheitsselement, der nur ein einziges maximales Primideal m enthält und der Maximalbedingung genügt) hat J. S. Cohen den folgenden Struktursatz bewiesen: Ist \mathfrak{R} hinsichtlich der durch m und seine Potenzen festgelegten Topologie vollständig, so ist \mathfrak{R} homomorphes Bild eines formalen Potenzreihenrings $\mathfrak{R}_0\{x_1, \dots, x_n\}$ in endlich vielen Unbestimmten über einem Ring \mathfrak{R}_0 , der entweder einen Körper oder einen perfekten, diskreten Bewertungsring oder ein homomorphes Bild eines diskreten Bewertungsringes darstellt. Verf. zeigt: Verzichtet man auf die Forderung, daß die Anzahl der Unbestimmten x_i endlich ist, so gilt der Struktursatz auch ohne Maximalbedingung, wenn nur der vollständige Stellenring \mathfrak{R} der (für die Topologisierung notwendigen) Bedingung genügt, daß der Durchschnitt $\bigcap_n m^n$ aller Potenzen von m gleich dem Nullideal wird. — In einem ersten Anhang wird zunächst der Satz bewiesen: Ist \mathfrak{R} ein vollständiger Stellenring mit $\bigcap_n m^n = (0)$,

so enthält auch \mathfrak{S} ein nullteilerfreier, ganz abhängiger Oberring von \mathfrak{R} , so enthält auch \mathfrak{S} nur ein einziges maximales Primideal, und es ist sicher \mathfrak{S} gleichfalls ein vollständiger Stellenring, wenn \mathfrak{S} über \mathfrak{R} eine endliche Modulbasis besitzt. Weiter wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß der den vollständigen Stellenring \mathfrak{R} enthaltende Stellenring \mathfrak{S} über \mathfrak{R} eine endliche Modulbasis hat. — In einem zweiten Anhang wird ein Beispiel eines nicht-Noetherschen Stellenrings \mathfrak{S} angegeben, dessen maximales Primideal eine endliche Basis besitzt.

Wolfgang Krull.

Azumaya, Gorô and Tadasu Nakayama: On absolutely uni-serial algebras. *Japan. J. Math.* **19**, 263—273 (1948).

Eine Algebra \mathfrak{A} mit Einheitsselement 1, Radikal \mathfrak{N} und Zentrum \mathfrak{Z} heißt primär, wenn $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ einfach ist, sie heißt primär zerlegbar, wenn sie die direkte Summe von primären Algebren darstellt. Unter einer einreihigen („uni-serial“) Algebra verstehen Verff. eine primär zerlegbare Algebra, bei der alle die Links- und Rechtsideale, die durch primitive Idempotente erzeugt werden, genau eine Kompositionsreihe besitzen. Ist gleichzeitig mit \mathfrak{A} jede durch Grundkörpererweiterung entstehende Algebra \mathfrak{A}_x einreihig bzw. primär zerlegbar, so wird \mathfrak{A} absolut einreihig bzw. absolut primär zerlegbar genannt. Eine zentralmaximale Algebra ist dadurch gekennzeichnet, daß der Rang von \mathfrak{A} über dem Grundkörper \mathfrak{K} gleich dem

t^2 -fachen des Ranges von \mathfrak{Z} über \mathfrak{K} ist, wobei t^2 den Rang der halbeinfachen Algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ über ihrem Zentrum bedeutet. — In § 1 wird der bemerkenswerte Satz bewiesen: Die primäre Algebra \mathfrak{A} ist dann und nur dann absolut primär zerlegbar, wenn das Zentrum von $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ über $(\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$ total inseparabel ist. In § 2 wird vor allem gezeigt: Bei einer zentralmaximalen Algebra \mathfrak{A} ist das Zentrum von $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ identisch mit $(\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$; die Menge der zweiseitigen Ideale von \mathfrak{A} wird durch die Zuordnung $\alpha \rightarrow \alpha \cap \mathfrak{Z}$ umkehrbar eindeutig auf die Menge der \mathfrak{Z} -Ideale abgebildet. \mathfrak{A} ist dann und nur dann zentralmaximal, wenn die durch algebraische Abschließung des Grundkörpers entstehende Algebra \mathfrak{A}_Ω die direkte Summe von Unteralgebren wird, die sich als Matrizenalgebren über ihren Zentren darstellen lassen. In § 3 bzw. dem ersten Teil von § 4 wird einerseits bewiesen, daß \mathfrak{A} einreihig sein muß, wenn $\mathfrak{N} = c \cdot \mathfrak{A}$ ein durch ein Element des Zentrums erzeugtes Hauptideal darstellt; andererseits wird gezeigt, daß eine primäre kommutative Algebra dann und nur dann absolut einreihig ist, wenn sie eine einfache Erweiterung ihres Grundkörpers bildet, $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}[a]$. Auf Grund dieser Resultate kann dann die Strukturanalyse der absolut einreihigen Algebren leicht zu Ende geführt werden. Man erhält: I. Kriterium. \mathfrak{A} ist dann und nur dann absolut einreihig, wenn \mathfrak{A} zentralmaximal ist und \mathfrak{Z} die direkte Summe von einfachen Erweiterungen des Grundkörpers darstellt. II. Kriterium. \mathfrak{A} ist dann und nur dann absolut einreihig, wenn \mathfrak{Z} absolut einreihig und \mathfrak{N} ein durch ein Element des Grundkörpers erzeugtes Hauptideal ist. — In § 5 wird ergänzend eine interessante darstellungstheoretische Charakterisierung der absolut einreihigen Algebren gegeben: Unter allen primär zerlegbaren Algebren haben genau die absolut einreihigen keine wesentlich transzendente Darstellung.

Wolfgang Krull.

Lesieur, L.: Le transfert de certaines propriétés d'un anneau A à l'anneau des polynômes $A[x]$. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25.9.—1.10.1949), 99—101 (1950).

Verf. bespricht einige Eigenschaften, die sich leicht von dem kommutativen Ring A mit Einheitselement auf den Polynomring $A[x]$ übertragen lassen. Hervorgehoben seien die Bemerkungen über die Primideale \mathfrak{p}_x aus $A[x]$, die über einem bestimmten Primideal \mathfrak{p} von A liegen (also der Durchschnittsgleichung $\mathfrak{p}_x \cap A = \mathfrak{p}$ genügen) und ein auf diese Bemerkungen gestützter Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes für den Polynomring $K[x_1, \dots, x_n]$ mit Körperkoeffizienten.

Wolfgang Krull.

Jacobson, N. and C. E. Rickart: Jordan homomorphisms of rings. Trans. Amer. math. Soc. 69, 479—502 (1950).

The paper is divided into three parts: (1) The authors consider a Jordan homomorphism J of rings which is an additive mapping $a \rightarrow a^J$ satisfying $(a^2)^J = (a^J)^2$, $(a b a)^J = a^J b^J a^J$. They extend a theorem of Hua on Jordan automorphism of a total matrix ring over a sfield into the Jordan homomorphism of locally matrix rings and the Jordan automorphism of primitive rings with minimal ideals. (2) A mapping $a \rightarrow a^J$ is called a Lie triple system homomorphism if it is additive and satisfies $[[a b] c] = [[a^J b^J] c^J]$, where $[a b] = a b - b a$. They determine conditions that such mappings be Lie ring homomorphisms or anti-homomorphisms. But the authors did not get the similar result for Lie homomorphisms as precise as that for Jordan homomorphisms, though this has been established by Hua for the Lie automorphisms of a total matrix ring R_n if $n > 2$ and characteristic of the sfield is different from 2 and 3. (3) The authors give conditions that a Jordan derivation of a ring, i. e. an additive mapping D of a ring into itself such that $(a^2)^D = a a^D + a^D a$, $(a b a)^D = a^D b a + a b^D a + a b a^D$, be an ordinary derivation. Loo-Keng Hua.

Albert, A. A.: On the power-associativity of rings. Summa Brasil. Math. 2, 21—33 (1948).

Unter einem Ring wird eine abelsche, additiv geschriebene Gruppe verstanden.

in der eine zweite als Multiplikation bezeichnete Verknüpfung für alle Elementpaare so erklärt ist, daß $(a + b)c = ac + bc$ und $c(a + b) = ca + cb$ gilt. Ein Ring heißt assoziativ, wenn $a(bc) = (ab)c$ gilt, und kommutativ, wenn $ab = ba$ gilt. Ist für jedes Ringelement x der von x erzeugte Unterring assoziativ, so heißt der Ring potenzassoziativ. Gibt es natürliche Zahlen m mit $m \cdot x = 0$ ($m \cdot x$ bedeutet $x + \dots + x$ mit m Summanden) für alle Ringelemente x , so wird die kleinste derartige Zahl als Charakteristik des Ringes bezeichnet. Ist $m \cdot x \neq 0$ für jede natürliche Zahl m und jedes Ringelement $x \neq 0$, so wird die Charakteristik des Ringes $= 0$ gesetzt. Es werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Ein kommutativer Ring, der eine zu 30 prime natürliche Zahl als Charakteristik besitzt, ist potenzassoziativ, wenn $x^2 x^2 = (x^2 x)x$ für alle Ringelemente x gilt. 2. Ein Ring der Charakteristik 0, in dem $x^2 x = x x^2$ und $x^2 x^2 = (x^2 x)x$ für alle Ringelemente x gelten, ist potenzassoziativ. — Die folgenden Beispiele zeigen, daß keine der Voraussetzungen überflüssig ist: Ein nicht potenzassoziativer Ring mit $x^2 x^2 = (x^2 x)x$ und irgendeiner zu 30 primen natürlichen Zahl als Charakteristik; kommutative, nicht potenzassoziative Ringe der Charakteristik 2, 3, 5 mit $x^2 x = x x^2$ und $x^2 x^2 = (x^2 x)x$.
Günther Pickert.

Albert, A. A.: A theory of power-associative commutative algebras. Trans. Amer. math. Soc. 69, 503—527 (1950).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen über potenzassoziative Algebren (dies. Zbl. 33, 154), in denen hervorgetreten war, daß die dort behandelten Algebren, soweit kommutativ und einfach, durchweg Jordansche Algebren sind, findet Verf. den tieferen Grund hierfür in einer allgemeinen Strukturtheorie der potenzassoziativen kommutativen Algebren, welche die Strukturtheorie für Jordansche Algebren bei Primzahlcharakteristik einschließt. Unter der üblichen Annahme, daß die Charakteristik nicht 2, 3 oder 5 ist und daß jedes Element ein Halbes besitzt, wird zunächst gezeigt, daß jeder potenzassoziative kommutative einfache Ring, welcher zwei orthogonale Idempotente mit Summe $\neq 1$ enthält, ein Jordanscher Ring ist. Im Falle einer Algebra A existiert eine 1, die dann bei geeigneter skalarer Erweiterung des Zentrums in absolut-primitive orthogonale Idempotente zerfällt. Deren Anzahl t wird der Grad der Algebra genannt. Im Falle $t > 2$ ist A nach dem angegebenen allgemeinen Satz eine Jordansche Algebra. Ferner stellt sich heraus, daß jede Jordansche Algebra mit Grad $t \geq 2$ eine klassische Jordansche Algebra ist (bestehend aus linearen Transformationen oder nach geeigneter skalarer Erweiterung vom ursprünglichen Jordanschen Typus — Cayleyzahlen). Schließlich erweist sich jede halbeinfache Algebra des betrachteten Typus als eindeutige direkte Summe einfacher Algebren.
Helmuth Hasse.

Rees, D.: Linear systems of algebras. Ann. math., Princeton, II. S. 51, 123—160 (1950).

Let $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r$ be non-associative algebras over a field \mathfrak{F} with the same underlying vector space \mathfrak{M} of order n ; \mathfrak{A}_i differ merely in the definition of multiplication. The multiplication in \mathfrak{A}_i is written as $a M_i b$ ($a, b \in \mathfrak{A}$). The author defines a new algebra again with the same vector space \mathfrak{M} such that the multiplication is defined by the rule: $a M b = \sum_i \alpha_i (a M_i b)$ where $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ belong to \mathfrak{F} . If α_i range over \mathfrak{F} , one obtains a linear system Σ of algebras whose multiplication space \mathfrak{M} (consisting of all M) may be considered as an r -dimensional vector space over \mathfrak{F} . In the theory certain associative algebras of linear transformations such as the enveloping algebras $\mathfrak{Q}(\Sigma)$, $\mathfrak{R}(\Sigma)$ and $\mathfrak{T}(\Sigma)$ of the spaces $L(\Sigma)$, $R(\Sigma)$ and $L(\Sigma)_r$, $R(\Sigma)$ are of importance, where $L(\Sigma)$ [$R(\Sigma)$] denotes the left [right] multiplication space of Σ . Several criteria for the simplicity and semi-simplicity of Σ are proved in terms of the transformation algebra $\mathfrak{T}(\Sigma)$. The concept of the extension of a given system Σ is defined as follows. If B and C are linear transformations of the vector space \mathfrak{M} into itself and M is any multiplication on \mathfrak{M} , then $(a B) M (b C) = a (B M C) b$ defines a new multiplication $B M C$. If B and C run over some given linear manifolds \mathfrak{B} and \mathfrak{C} of linear transformations on \mathfrak{M} , then one obtains the extended system $\Sigma(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. It is proved that if \mathfrak{B} and \mathfrak{C} contain the identity transformation and Σ is simple, then $\Sigma(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ is also simple. Associative systems defined by $a M_1 (b M_2 c) = (a M_1 b) M_2 c$

for all a, b, c in \mathfrak{A} , are also discussed. In the second part of the paper the author deals with systems in which the lattice of right ideals is complemented; these systems are called right completely reducible. It is shown that Σ is right completely reducible if and only if $\mathfrak{R}(\Sigma)$ is semi-simple, further that if $\mathfrak{R}(\Sigma)$ is simple and if both $\mathfrak{R}(\Sigma)$ and $\mathfrak{Q}(\Sigma)$ contain the identity transformation, then Σ is simple. In order to obtain a structure theory for right and left simple algebras, in the third part of the paper the concept of matrix expansions of a system is introduced. If \mathfrak{A} is a vector space with \mathfrak{M} as a space of multiplications spanned by $r \times s$ multiplications M_{ij} ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$) arranged in a matrix form $M = (M_{ij})$, then the set of all $r \times s$ matrices A, B, \dots over \mathfrak{A} constitute an algebra, the matrix expansion of Σ , with multiplication defined by $A \cdot B = A M B$. Among many results on matrix expansions the most interesting is an analogue of Wedderburn's lemma stating that any algebra whose right and left transformation algebras contain subalgebras with the identity transformation and isomorphic to complete matrix algebras over \mathfrak{F} , is necessarily isomorphic to a matrix expansion. The paper concludes with the discussion of the uniqueness of the representation of a right simple system as a matrix expansion.

Ladislav Fuchs.

Mal'cev, A. I.: Über Algebren mit identischen definierenden Relationen. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 19—33 (1950) [Russisch].

Ausgangspunkt der Untersuchungen des Verf. ist die Bemerkung, daß einige Sätze von I. D. Ado über Automorphismen nilpotenter Lie-Gruppen [Bull. Soc. phys.-math. Univ. Kazan, III. S. 7, 3—43 (1934/35); dies. Zbl. 14, 347; Doklady Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR Kasan 1942] und von I. R. Šafarevič über p -Erweiterungen endlicher p -Gruppen [Mat. Sbornik, n. S. 20, 351—363 (1947)] ihrer Formulierung nach Analogien aufweisen, aber mit ganz verschiedenen Methoden bewiesen worden sind. Verf. vereinheitlicht und vereinfacht diese Beweise und dehnt die Sätze auf weitere Klassen von algebraischen Systemen aus. Zu diesem Zwecke betrachtet er (nicht-assoziative) Algebren, die durch Systeme von Erzeugenden definiert und abgesehen von gewissen identisch erfüllten Relationen frei sind — sogenannte reduziert freie Algebren. Beispiele sind (i) freie assoziative Algebren, (ii) freie Lie-Algebren, (iii) freie nilpotente Algebren [die Fälle (i) und (ii) können auch mit (iii) kombiniert werden]. Die wichtigsten Sätze sind: Wenn eine reduziert freie Algebra eine endliche Anzahl von Erzeugenden hat und keiner eigentlichen Restklassen-Algebra isomorph ist, so ist jedes System von n Erzeugenden frei. Jede reduziert freie Algebra über einem unendlichen Grundkörper ist verallgemeinert nilpotent, d. h. der Durchschnitt ihrer Potenzen ist null. Wenn \mathfrak{I} ein beliebiges (zweiseitiges) Ideal in einer reduziert freien nilpotenten Algebra \mathfrak{A} ist, dann wird jeder Automorphismus von $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ durch einen Automorphismus von \mathfrak{A} induziert. Wenn unter den gleichen Voraussetzungen \mathfrak{I} und \mathfrak{J} Ideale mit isomorphen Restklassen-Algebren $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ sind und wenn die Bilder dieser Ideale in $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ ein und denselben Rang haben, so gibt es einen Automorphismus von \mathfrak{A} , der \mathfrak{I} in \mathfrak{J} überführt. Spezialisiert man sich nun auf freie nilpotente Lie-Algebren endlichen Ranges, so ergeben sich die erwähnten Sätze von Ado. — Entsprechende Sätze gelten nun auch in Gruppen (und Ringen). Verf. stützt sich bei ihrer Herleitung auf Resultate von B. H. Neumann über Identische Relationen in Gruppen [Math. Ann. 114, 506—525 (1937); dies. Zbl. 16, 351]. Bei den beiden letzten muß man sich auf solche Normalteiler der reduziert freien nilpotenten Gruppe G beschränken, die die Kommutatorgruppen von G enthalten. Man spezialisieren nun in der folgenden Weise: G sei eine freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, p eine Primzahl. Wir definieren G_1 als die von den Kommutatoren der Elemente von G mit den p -ten Potenzen der Elemente von G erzeugte Gruppe und rekursiv $G_{i+1} = (G_i)_1$. Ferner sei $T_i = G_i/G_i$. T_i ist eine reduziert freie nilpotente Gruppe endlicher Ordnung p^i . Für sie ergeben sich aus den obigen Sätzen die erwähnten Sätze von Šafarevič.

Kurt A. Hirsch.

Barsotti, Iacopo: Algebre senza base finita (II). Ann. mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 243—260 (1948).

Die elementaren Sätze der Algebrentheorie (wie in G. Scorza, Corpi numerici ed algebre, Messina 1921, formuliert) werden auf Algebren mit unendlicher Basis

übertragen, wobei nur auf die Abweichungen eingegangen wird, die sich ergeben. Besonders sorgfältig wird die Konstruktion des direkten Produktes zweier Algebren durchgeführt. Die halbeinfachen Algebren dadurch zu definieren, daß sie keine nilpotenten Ideale $\neq 0$ enthalten, wie es Verf. tut, ist unzuweckmäßig, da sich dann die Zerlegung halbeinfacher Algebren in einfache nicht auf Algebren unendlichen Ranges übertragen läßt. Die allgemeinste Definition von Halbeinfachheit und Radikal wurde von N. Jacobson gegeben.

Max Deuring.

Jou, Yuh-Lin: The „fundamental theorem of algebra“ for Cayley numbers. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 29—33 (1950).

L'A. définit un „polynôme“ sur une algèbre de Cayley C de la façon suivante: un monôme de degré k en x est le produit de k facteurs x et d'un nombre quelconque de coefficients constants appartenant à C , le produit étant pris dans un ordre quelconque et avec une répartition quelconque des parenthèses. Un polynôme est alors une somme d'un nombre quelconque de tels monômes. Généralisant une méthode topologique utilisée par Eilenberg et Niven pour les quaternions [elle-même inspirée de la démonstration classique du théorème fondamental de l'algèbre par les propriétés du degré d'application; cf. Bull. Amer. math. Soc. 50, 246—248 (1944)] l'A. montre que si un polynôme $f(x)$ sur C n'a qu'un seul terme du plus haut degré, il a au moins une racine dans C .

Jean Dieudonné.

Zemmer, Joseph L.: A note on division algebras of order sixteen. Portugaliae Math. 9, 171—176 (1950).

F sei ein Körper, über dem die Cayley-Dickson-Algebra C eine Divisionsalgebra ist. L sei der lineare Vektorraum der Ordnung 8 über F . Dann läßt sich durch $(p, q) \cdot (r, t) = (p \cdot r + t S \circ q, t \cdot p + q \cdot r S)$ eine lineare Algebra A der Ordnung 16 über F definieren. Dabei liegen p, q, r, t in L , die Multiplikation in C ist mit \cdot bezeichnet, \circ bedeutet die Multiplikation einer beliebigen Divisionsalgebra C_0 der Ordnung 8 über F und S die Abbildung, die jedem Element von C seine Konjugierte zuordnet. Eine in A definierte Funktion $f[(p, q)]$ heißt eine Normfunktion in A , wenn sie ein irreduzibles, homogenes Polynom ist und wenn aus $f[(p, q)] = 0$ $p = q = 0$ folgt und $f[(p, q) \cdot (r, t)] = f[(p, q)] \cdot f[(r, t)]$ gilt. Sei $N(p) = p S \cdot p$ die Norm von $p \in C$, so zeigt Verf., daß jede Normfunktion vom Grad $k > 2$ die Gestalt $f[(p, q)] = N[N(p) - q S \circ q]$ hat und daß es keine Normfunktion in A gibt, wenn F der Körper der rationalen oder der reellen Zahlen ist. Da aus der Existenz einer Normfunktion folgt, daß A eine Divisionsalgebra ist, ergibt sich ein Zugang zur Frage der Existenz von Divisionsalgebren der Ordnung 16.

Georg Reichel.

Herstein, I. N.: Group-rings as *-algebras. Publ. math., Debrecen 1, 201—204 (1950).

Verf. führt im Gruppenring Γ einer endlichen Gruppe G über dem Körper K der komplexen Zahlen die Operation $A = \sum \lambda_i g_i \rightarrow A^* = \sum \bar{\lambda}_i g_i^{-1}$ ($\lambda_i \in K, g_i \in G$) ein und beweist mit Hilfe dieser Operation einige bekannte Sätze über den Gruppenring Γ und seine minimalen Linksideale.

Georg Reichel.

Dieudonné, Jean: Sur les extensions transcendantes séparables. Summa Brasil. Math. 2, 1—20 (1947).

Die Separabilität eines kommutativen Erweiterungskörpers E über dem Grundkörper K wird im allgemeinen nur für algebraische Erweiterungen E definiert. Eine geeignete Verallgemeinerung dieses Begriffes gestattet es, auch bei transzendenten Erweiterungen von Separabilität zu reden. Solche Überlegungen wurden bereits von S. MacLane [Duke Math. J. 5, 372—393 (1939); dies. Zbl. 21, 101] entwickelt. Durch systematische Verwendung des Begriffes der linearen Unabhängigkeit erzielt Verf. eine außerordentlich untersichtige und allgemeinere Darstellung der MacLaneschen Ergebnisse. Darüber hinaus untersucht Verf. im weiteren Verlauf der Arbeit einfache Fälle inseparabler Erweiterungen. — Alle auftretenden Körper werden als Unterkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers Ω der Charakteristik $p > 0$ aufgefaßt. E sei ein Erweiterungskörper von K . E heißt separabel über K , wenn mit jeder Teilmenge X von E , deren Elemente linear unabhängig über K sind, auch die Menge X^p (d. h. die Menge der Elemente x^p mit $x \in X$) diese Eigenschaft besitzt; oder gleichbedeutend:

X soll diese Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit auch hinsichtlich $K^{p^{-1}}$ besitzen. Hinreichend für die Separabilität von E über K ist bereits, daß eine Basis (b_λ) von E über K existiert mit der Eigenschaft, daß die b_λ auch über $K^{p^{-1}}$ linear unabhängig sind. Im Falle einer algebraischen Erweiterung fällt diese Definition der Separabilität mit der üblichen Definition zusammen. Ist K vollkommen (d. h. $K^{p^{-\infty}} = K$), so ist jede Erweiterung von K separabel über K . Eine rein transzendente Erweiterung eines beliebigen Grundkörpers K ist stets separabel über K . Ist E separabel über K , so braucht E im allgemeinen über einem Zwischenkörper F zwischen E und K nicht separabel zu sein. Es gilt jedoch die Transitivität in folgender Form: Ist F separabel über K und E separabel über F , so ist E auch separabel über K . — Ein endliches System von Elementen $a_i \in E$ ($i = 1, \dots, n$) heißt p -unabhängig, wenn die n^p Elemente $z_{v_1, \dots, v_n} = a_1^{v_1} \cdots a_n^{v_n}$ ($v_i = 1, \dots, p$) linear unabhängig über K (E^p) sind. Sinngemäß ergibt sich hieraus der Begriff einer p -Basis von E über K . Die Länge einer solchen p -Basis (sofern sie endlich ist) hängt nur von E und K ab und wird der Unvollkommenheitsgrad (degré d'imperfection) von E über K genannt. Für $K \subset F \subset E$ gilt dann: Es ist der Unvollkommenheitsgrad von E über K höchstens gleich der Summe der Unvollkommenheitsgrade von E über F und von F über K . — Es sei wiederum $K \subset F \subset E$, und E sei separabel über F . Ist dann B eine über K p -unabhängige Teilmenge von F und entsprechend C eine über F p -unabhängige Teilmenge von E , so ist $B \cup C$ p -unabhängig über K . Als Folgerung ergibt sich, daß je zwei der nachstehend angegebenen Eigenschaften die dritte nach sich ziehen: (a) B ist eine p -Basis von F über K ; (b) C ist eine p -Basis von E über F ; (c) $B \cup C$ ist eine p -Basis von E über K , und es ist $B \cap C = \emptyset$. — Eine Erweiterung E von K heißt relativ vollkommen über K , wenn der Unvollkommenheitsgrad von E über K gleich Null ist. Jede vollkommene Erweiterung von K ist relativ vollkommen über K . Jede algebraische und separable Erweiterung ist relativ vollkommen. Aber eine relativ vollkommene Erweiterung von K braucht nicht notwendig separabel zu sein. Ist E separabel über K und ist F ein relativ vollkommener Zwischenkörper zwischen K und E , so ist E separabel über F . — Ist E transzendent über K und ist B eine Transzendenzbasis, so heißt B separierend (base séparante), wenn E über K (B) separabel ist (E ist dann auch über K separabel). Ist der Transzendenzgrad von E über K endlich, so besitzt E dann und nur dann eine separierende Transzendenzbasis, wenn E über K separabel ist und der Unvollkommenheitsgrad von E über K mit dem Transzendenzgrad übereinstimmt. — Ist E eine von endlich vielen Elementen erzeugte Erweiterung von K , so gibt es einen Zwischenkörper F zwischen E und K , der eine separierende Transzendenzbasis über K besitzt und für den gilt: $E \subset K^{p^{-\infty}}(F)$. F ist eine maximale separable Erweiterung von K in E . Jedoch gibt es im allgemeinen mehrere solche Körper F , die als ausgezeichnete separable Erweiterungen von K in E bezeichnet werden (extensions séparables distinguées). Der Grad von E über einem ausgezeichneten Erweiterungskörper F ist unabhängig von der Wahl von F und ist gleich der von A. Weil eingeführten Inseparabilitätsordnung von E über K . Für diese Inseparabilitätsordnung werden mehrere Relationen hergeleitet. Anschließend folgen verschiedene Sätze, die Aussagen über die Algebraizität gewisser Körper gestatten.

Hans Joachim Kowalsky.

Hasse, Helmut: Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 29—40 (1949).

Für zwei quadratische Körper $K_i = \Omega(\sqrt{w_i})$ ($i = 1, 2$) über Ω hat man es oft mit dem invarianten Produkt $K = K_1 K_2 = \Omega(\sqrt{w_1 w_2})$ zu tun, dabei spielt der „uneigentlich“ quadratische Körper $K_0 = \Omega(\sqrt{1})$ die Rolle eines Einselementes. Für zyklische kubische Körper $K = \Omega(\sqrt[3]{w})$ gilt Ähnliches nicht mehr. Mit Hilfe gewisser früherer Begriffsbildungen des Verf. (dies. Zbl. 32, 255—259) wird aber die vorige Multiplikation für alle abelschen Körper K/Ω mit fester Galoisgruppe \mathcal{G} verallgemeinert. Hierzu ist es vor allem nötig, statt der K/Ω allgemeiner die galoisschen assoziativen kommutativen Algebren K/Ω mit der Gruppe \mathcal{G} zuzulassen (für die Definition vgl. l. c. S. 255; K/Ω ist separabel, d. h. bei jeder Grundkörpererweiterung halbeinfach). Der Kernkörper K_0 von K (vgl. l. c. S. 255) wird die Rolle des obigen „uneigentlichen“ K_0 übernehmen. Kurz wird K/Ω ein „galoisscher (insbesondere abelscher) Körper“ genannt, und zwar ein „eigentlicher“, wenn er einer im üblichen Sinne ist. — Nunmehr sei ($\mathcal{G} =$) \mathfrak{A} abelsch, und seien K_i/Ω endlich viele abelsche Körper mit den zu \mathfrak{A} isomorphen Galoisgruppen \mathfrak{A}_i ($i = 1, 2, \dots$). Es seien π_i entsprechende (feste) Isomorphismen ($\mathfrak{A}_i^{\pi_i} = \mathfrak{A}$). (Die sämtlichen π_i sind die $\pi_i \alpha_i$ mit beliebigen Automorphismen α_i von \mathfrak{A} .) Die Paare $(K_i/\Omega, \pi_i)$ werden fixierte abelsche Körper mit der Gruppe \mathfrak{A} genannt, diese werden sich invariant multiplizieren lassen. Hierzu bilde man einerseits das direkte (Algebren-)Produkt $K = K_1 \times K_2 \times \dots$. Dann ist K/Ω ein abelscher Körper mit der Gruppe $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots$; dabei ist die Zuordnung $A_1 A_2 \cdots \rightarrow A_1^{\pi_1} A_2^{\pi_2} \cdots$ ($A_i \in \mathfrak{A}_i$) ein Homomorphismus von \mathfrak{A} mit \mathfrak{A} . Diesem entspricht ein Isomorphismus π_0 zwischen $K_0 = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ und \mathfrak{A} , wobei \mathfrak{A} der Homomorphiekern ist ($\mathfrak{A}_0^{\pi_0} = \mathfrak{A}$). Bezeichne $K_0 \subset K$ den \mathfrak{A} zugeordneten Invariantenkörper. Dann ist

$(K_0/\Omega, \pi_0)$ ein fixierter Körper mit der Gruppe \mathfrak{A} , und das Produkt wird definiert:

$$(*) \quad (K_1/\Omega, \pi_1) (K_2/\Omega, \pi_2) \cdots = (K_0/\Omega, \pi_0).$$

(Einer Substitution $\pi_i \rightarrow \pi_i \alpha$ entspricht einfach $\pi_0 \rightarrow \pi_0 \alpha$, im allgemeinen aber ändert sich bei $\pi_i \rightarrow \pi_i \alpha_i$ auch K_0). — Hat man nun eine invariante Kennzeichnung der K_i innerhalb Ω , so läßt sich die vorige Multiplikation durch die entsprechenden Invarianten in Ω beherrschen. Solche Kennzeichnungen sind erstens die Kummer-Erzeugung, wenn Ω eine im Exponenten n von \mathfrak{A} nicht aufgehende Charakteristik hat und die n -ten Einheitswurzeln enthält, zweitens die zugeordnete Kongruenzgruppe (nach der Klassenkörpertheorie im großen bzw. kleinen), wenn Ω ein endlich-algebraischer Zahlkörper oder ein algebraischer Funktionskörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper oder ein zugehöriger lokaler Körper ist. — Im ersten Fall liegen die (einfachen) Charaktere $\chi(A)$ von \mathfrak{A} in Ω , sie bilden eine zu \mathfrak{A} isomorphe Gruppe X . Zunächst wird ein einzelner abelscher Körper (ohne Fixierung) mit der Galoisgruppe \mathfrak{A} betrachtet. Sei $\{\omega_\chi\}$ eine Faktorbasis von K/Ω (vgl. l. c. S. 255), d. h. ein System regulärer Elemente ω_χ von K ($\chi \in X$) mit (1) $\omega_\chi^A = \chi(A) \omega_\chi$. Alle entstehen aus einer durch die Substitutionen

$$(2) \quad \omega_\chi \rightarrow \omega_\chi a_\chi \quad [a_\chi \in \Omega^* (= \text{Multiplikationsgruppe von } \Omega)].$$

Es gelten

$$(3) \quad \omega_\chi \omega_\psi = \omega_{\chi\psi} c_{\chi, \psi} \quad (c_{\chi, \psi} = \text{Faktorensystem zu } X \text{ in } \Omega^*),$$

$$(4) \quad c_{\chi, \psi} = c_{\psi, \chi}, \quad c_{\varphi\chi, \psi} c_{\varphi, \chi} = c_{\varphi, \chi\psi} c_{\varphi, \psi}.$$

Dabei bewirkt (2) die Substitution

$$(5) \quad c_{\chi, \psi} \rightarrow c_{\chi, \psi} \frac{a_\chi a_\psi}{a_{\chi\psi}}.$$

Die rechte Seite bildet eine Klasse c assoziierter Faktorensysteme zu X in Ω^* . Sie ist nur (3) und (4) unterworfen und ist eine gesuchte kennzeichnende Invariante von K/Ω in Ω . Nach Teil I. der l. c. referierten Arbeit entspricht der Kernkörper K_0/Ω der engsten Faktorgruppe X_0 von X , für die es in der Klasse c ein System $c_{\chi, \psi}$ gibt, das nur von den Klassen χ_0, ψ_0 von χ, ψ in X_0 abhängt. Dabei ist X_0 die Charaktergruppe der Galoisgruppe \mathfrak{A}_0 von K_0/Ω , wodurch $\mathfrak{A}_0 (\subseteq \mathfrak{A})$ und damit $K_0/\Omega (\subseteq K/\Omega)$ festgelegt sind. Die eigentlichen K/Ω entsprechen dem Fall $X_0 = X$ einer irreduziblen Klasse c . Vollzerfällt K/Ω (Fall $K_0 = \Omega$) für die zerfallenden c mit $c_{\chi, \psi} = \frac{a_\chi a_\psi}{a_{\chi\psi}}$.

— Man kommt zu einer anderen Kennzeichnung von K/Ω in Ω so: Die ω in (1), (2) bilden eine Gruppe $W/\Omega^* \cong X$, dabei ist eine Faktorbasis ω_χ ein Vertretersystem aller Klassen nach Ω^* (die $c_{\chi, \psi}$ sind ein Faktorensystem zu dieser Schreierschen Erweiterung W). Für $W = W^n$ gilt die Homomorphie $X \sim W/\Omega^{*n}$. Nach Teil II obiger Arbeit gilt sogar $W/\Omega^{*n} \cong X_0$, und W besteht aus den $w (\in \Omega^*)$ mit $\sqrt[n]{w} \in K_0$. Es gilt die Kummer-Erzeugung $K_0 = \Omega (\sqrt[n]{W})$, womit nach obigem auch K/Ω durch W/Ω^{*n} invariant gekennzeichnet ist. — Nach (1), (3) liegt der Potenzfaktor

$$(6) \quad \omega_\chi^{n_\chi} = c_\chi = \prod_{\nu=0}^{n_\chi-1} c_{\chi, \chi^\nu} \quad (n_\chi = \text{Ordnung von } \chi)$$

in Ω^* ; die durch (7) $w_\chi = \omega_\chi^n c_\chi^{m_\chi}$ ($n = n_\chi m_\chi$) repräsentierte n -Klasse in Ω^* hängt nur von χ_0 ab. Dabei bildet (7) ein Vertretersystem für die Klassen von W/Ω^{*n} . Es wird auch gearbeitet, wie man umgekehrt von den Potenzfaktoren zu den Faktorensystemen $c_{\chi, \psi}$ einer Klasse c kommt und wie sie sich direkt konstruieren lassen. — Die Invariante c liegt erst nach der Fixierung von K/Ω mit der Galoisgruppe \mathfrak{A}_* durch eine isomorphe Abbildung π auf die abstrakte Gruppe \mathfrak{A} fest und ist dann eine Invariante von $(K/\Omega, \pi)$. Hierzu werde c als Klasse assoziierter Faktorensysteme in Ω^* zu X aufgefaßt. Entsprechend hat man (1) durch (1*) $\omega_\chi^{A_*} = \chi(A_*^\pi) \omega_\chi$

($A_* \in \mathfrak{A}_*$) zu ersetzen. Bezeichnet $\hat{\alpha}$ den durch (8) $\chi^{\hat{\alpha}}(A) = \chi(A^\alpha)$ dem α antiisomorph zugeordneten Automorphismen von X , so hat man nach (1) für die Substitution $\pi \rightarrow \pi \alpha$ die Regel $\omega_\chi \rightarrow \omega_{\chi^{\hat{\alpha}}}, c_{\chi, \psi} \rightarrow c_{\chi^{\hat{\alpha}}, \psi^{\hat{\alpha}}}$; man definiere entsprechend $c \rightarrow c_\alpha$. Dabei bedeutet $c_\alpha = c$, daß $\hat{\alpha}$ für die Gruppe X_0 des Kernkörpers K_0/Ω den identischen Automorphismus bewirkt. Das gilt dann nur für $\hat{\alpha} = 1$ bzw. dann für alle $\hat{\alpha}$, wenn c irreduzibel, d. h. K/Ω eigentlich, bzw. wenn c zerfallend, d. h. K/Ω vollzerfallend ist. — Da umgekehrt $(K/\Omega, \pi)$ durch c bis auf die Substitutionen $\pi \rightarrow \pi \alpha$ mit $c_\alpha = c$ festgelegt ist, empfiehlt sich die Gleichheitsdefinition

$$(9) \quad (K/\Omega, \pi) = (K'/\Omega, \pi') \leftrightarrow c = c',$$

wobei c, c' die beiden invarianten Klassen sind; diese Gleichheit bedeutet $K' = K$ und die Existenz eines Automorphismus α von \mathfrak{A} mit $c_\alpha = c'$. In den zwei extremen Fällen eines eigent-

lichen bzw. voll zerfallenden K/Ω ist dann π' gleich π bzw. willkürlich. — Entsprechend wird die Invariante W/Ω^{*n} dem fixierten Körper $(K/\Omega, \pi)$ als der Homomorphismus $\chi \rightarrow w_\chi \Omega^{*n}$ von X in Ω^*/Ω^{*n} zugeordnet, dabei wird X_0 isomorph abgebildet. — Das eine Hauptresultat lautet: Die Produktrelation (*) drückt sich in den invariant zugeordneten Faktorensystemklassen als (10b) $c_1 c_2 \dots = c_0$ aus. (Links hat man wie üblich gliedweise zu multiplizieren.) Der Beweis erfolgt leicht durch direkte Berechnung. — Aus diesem Produktsatz und (9) folgt in Analogie zur Brauerschen Klassengruppe: Die fixierten abelschen Körper $(K/\Omega, \pi)$ mit der Gruppe \mathfrak{A} bilden eine multiplikative Gruppe. Diese ist isomorph zur Multiplikationsgruppe der Faktorensystemklassen c in Ω^* zur Charaktergruppe X von \mathfrak{A} . Einselement ist der voll zerfallende uneigentliche abelsche Körper mit der Gruppe \mathfrak{A} . — Der entsprechende Produkt- und Isomorphiesatz läßt sich auch in den Invarianten W/Ω^{*n} aufstellen als direkte Verallgemeinerung des anfangs genannten Beispiels. — Die entsprechende Theorie wird im oben genannten Fall mit Hilfe der Klassenkörpertheorie im großen so entwickelt. Man ordne dem $(K/\Omega, \pi)$ als Invariante die seinem Kernkörper K_0/Ω klassenkörpertheoretisch zugehörige Kongruenzdivisorengruppe H von endlichem Führer f in der Gruppe D der zu f primen Divisoren a von Ω zu. Das Artin-Symbol $\left(\frac{K/\Omega}{a}\right) = \left(\frac{K_0/\Omega}{a}\right)$ bildet die Klassengruppe D/H auf die Galoisgruppe von K_0/Ω

isomorph ab. Dann liefert $\left(\frac{K/\Omega}{a}\right)^\pi$ einen Isomorphismus von D/H in die abstrakte Gruppe \mathfrak{A} . Aus der Produktrelation (*) folgt

$$(10c) \quad \left(\frac{K_1/\Omega}{a}\right)^{\pi_1} \left(\frac{K_2/\Omega}{a}\right)^{\pi_2} \dots = \left(\frac{K_0/\Omega}{a}\right)^{\pi_0}$$

(für die zu allen Führern primen Divisoren a in Ω). Dies gibt eine Vorschrift zur Bestimmung der Klassengruppe D/H_0 von K_0/Ω , insbesondere wird die Hauptklasse durch die a geliefert, für die die linke Seite von (10c) 1 ist. — Im Fall der Klassenkörpertheorie im kleinen gilt Entsprechendes mit Normenrestsymbolen. — Verf. meldet noch an, daß er in einer anderen Arbeit (s. nachsteh. Referat) die invariante Kennzeichnung auch für galoissche Algebren K/Ω entwickelt und zwar als direkte Verallgemeinerung der obigen Kennzeichnung durch die Klassen c , vorläufig ohne Fixierung, da diese nicht unmittelbar verallgemeinerungsfähig ist. (Die Kennzeichnung durch W/Ω^{*n} eignet sich nicht, da diese an die „reinen“ Gleichungen gebunden ist, während die Möglichkeit der Erzeugung von galoisschen Körpern durch irgendwie „normierte“ Gleichungen aussichtslos ist.) Auch fehlt es im galoisschen Fall an klassenkörpertheoretischen Hilfsmitteln, das ist das große noch offene Problem der Zahlentheorie, aber wegen des engen Zusammenhanges in den oben im abelschen Fall die algebraische und arithmetische Theorie miteinander getreten sind, ist des Verf. weiteren Untersuchungen (im galoisschen Fall) eine hohe Bedeutung beizumessen, da auf diesem Wege das gesagte Problem in Angriff zu nehmen, nunmehr in erreichbare Nähe gerückt zu sein scheint.

L. Rédei.

Hasse, Helmut: Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. J. reine angew. Math. 187, 14—43 (1949).

In dieser Arbeit wird die am Schluß des vorsteh. Referats (= I) angemeldete invariante Kennzeichnung der galoisschen Algebra K/Ω mit einer beliebigen Galoisgruppe \mathfrak{G} durchgeführt. Verf. geht von einer direkten Zerlegung des Gruppenringes G von \mathfrak{G} über Ω in einfache Ideale aus, betrachtet aber auch die feinere Zerlegung in einfache Rechtsideale. Es werde vorausgesetzt, daß Ω eine zur Ordnung g von \mathfrak{G} prime Charakteristik hat und die g -ten Einheitswurzeln enthält. Nach R. Brauers Resultat [Amer. J. Math. 67, 461—471 (1945)] sind dann die einfachen Ideale G_χ von G den einfachen Frobeniusschen Charakteren χ von \mathfrak{G} eindeutig zugeordnete volle Matrixalgebren vom Rang f_χ^2 und Grad f_χ über zu Ω isomorphen Körpern Ω_{e_χ} , wobei f_χ zugleich der Grad der darin enthaltenen irreduziblen Darstellung Γ_χ von \mathfrak{G} über Ω ist und die e_χ primitive orthogonale Idempotenten des Zentrums Z von G sind. Bezeichnet $\mathfrak{S}(\subset Z)$ die Elementsummen der Klassen konjugierter Elemente in \mathfrak{G} , so gelten die bekannten Transformationsformeln

$$(4, 1) \quad \mathfrak{S} = \sum_{\chi} \frac{h_{\mathfrak{S}} \chi(S)}{f_\chi} e_\chi, \quad e_\chi = \frac{1}{g} \sum_{\mathfrak{S}} f_\chi \chi(S^{-1}) \mathfrak{S},$$

wobei $h_{\mathfrak{S}}$ die Anzahl der Elemente von \mathfrak{S} und S ein beliebiges Element der zugehörigen Klasse bezeichnen. Die direkten einfachen Rechtsidealkomponenten G_χ^k von G_χ ($k = 1, \dots, f_\chi$), die den Spalten der Matrizen von G_χ entsprechen, sind dann iso-

morph und vom Rang f_χ über Ω . — In der durch eine Normalbasis θ^S vermittelten Isomorphie $(3, 1) S \rightarrow \theta^S$ (insbesondere $1 \rightarrow \theta$) von G mit $K\Omega$ entspricht den G_χ^k eine direkte Zerlegung von $K\Omega$ in einfache Galoismoduln K_χ^k/Ω vom Rang f_χ , die je f_χ zu einem χ gehören sind isomorph. Reiht man ein System der (isomorph entsprechenden) Basisspalten solcher K_χ^k/Ω aneinander, so entstehen quadratische Matrizen W_χ vom Rang f_χ^2 , die $\sum f_\chi^2 = g$ Elemente aller W_χ bilden eine Basis von K/Ω . Für diese gilt $(4, 2) W_\chi^S = A_\chi(S) W_\chi$, weshalb W_χ eine Faktorbasis von K/Ω genannt wird; dabei sind die Matrizen $A_\chi(S)$ bei festem χ eine irreduzible Darstellung von \mathfrak{G} über Ω aus der χ zugeordneten Klasse. Mit der Normalbasis aus $(3, 1)$ besteht der Zusammenhang

$$(4, 3) \quad W_\chi = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi A_\chi(S^{-1}) \theta^S.$$

Zu Multiplikationsformeln für die W_χ kommt man durch Bildung des Kronecker-schen Matrizenprodukts $W_\chi \times W_\psi$ ($\chi \neq \psi$). Dieses läßt sich mit Hilfe einer kommutativen assoziativen halbeinfachen Algebra \mathfrak{K} , der Charakteralgebra von \mathfrak{G} über Ω (als Verallgemeinerung der Charaktergruppe im abelschen Fall) beschreiben. Diese ist durch $(4, 4) \chi\psi = \sum_\xi k_{\chi\psi}^\xi \xi$ definiert, wobei $k_{\chi\psi}^\xi$ die Vielfachheit angibt, mit der Γ_ξ beim Ausreduzieren der Produktdarstellung $\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi$ auftritt. (Auch eine Verallgemeinerung eines dem abelschen Fall entsprechenden Dualismus zwischen \mathfrak{K} und \mathfrak{G} läßt sich feststellen auf Grund einer direkten Zerlegung von \mathfrak{K} in zu Ω isomorphe Körper.) Und zwar gilt

$$(4, 5) \quad \Gamma_\chi \times \Gamma_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1} \Gamma_{\chi\psi} P_{\chi,\psi},$$

wo $\Gamma_{\chi\psi}$ die diagonale Zusammensetzung der $k_{\chi\psi}^\xi$ -fach genommenen Γ_ξ ist und das Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ aus regulären Matrizen über Ω vom Grad $f_\chi f_\psi$ besteht, die das Ausreduzieren leisten, (und durch das Vertretersystem Γ_ξ bis auf einen rechtsseitigen Faktor eindeutig bestimmt ist, der jede mit $\Gamma_{\chi\psi}$ vertauschbare reguläre Matrix über Ω sein kann). Es wird gezeigt, daß dann

$$(4, 6) \quad W_\chi \times W_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1} W_{\chi\psi} P_{\chi,\psi} C_{\chi,\psi}$$

gilt, wo $W_{\chi\psi}$ ebenfalls die diagonale Zusammensetzung der $k_{\chi\psi}^\xi$ -fach genommenen Γ_ξ (über K) ist und das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ aus durch Γ_ξ und W_ξ bestimmten Matrizen über Ω vom Grade $f_\chi f_\psi$ besteht. — Auch zeigt sich, daß bei festem Γ_ξ die zulässigen Basistransformationen durch die Substitutionen $(4, 7) W_\chi \rightarrow W_\chi A_\chi$ gegeben sind mit beliebigen regulären Matrizen A_χ über Ω . Dabei gilt

$$(4, 8) \quad C_{\chi\psi} \rightarrow (P_{\chi,\psi}^{-1} A_{\chi\psi} P_{\chi,\psi})^{-1} C_{\chi,\psi} (A_\chi \times A_\psi),$$

wodurch die Klasse \mathfrak{C} assoziierter Faktorensysteme zu \mathfrak{K} definiert ist; diese ist die gesuchte kennzeichnende Invariante von $K\Omega$ in Ω . — Es gelten die Kommutativ- und Assoziativrelationen

$$(4, 9) \quad \begin{aligned} C_{\psi,\chi} &= V_{\chi,\psi}^{-1} C_{\chi,\psi} V_{\chi,\psi}, \\ (P_{\varphi,\chi} \times J_\varphi)^{-1} C_{\varphi\chi,\psi} (P_{\varphi,\chi} \times J_\varphi) &\cdot (C_{\varphi,\chi} \times J_\varphi) \\ &= (J_\varphi \times P_{\chi,\psi})^{-1} C_{\varphi,\chi\psi} (J_\varphi \times P_{\chi,\psi}) \cdot (J_\varphi \times P_{\chi,\psi}). \end{aligned}$$

Dabei sind die $V_{\chi,\psi}$ gewisse (durch die Grade f_χ, f_ψ bestimmte) Permutationsmatrizen, ihr Auftreten folgt aus der Inkommutativität des Kroneckerschen Produktes. Die $C_{\varphi\chi,\psi}$ entstehen als diagonale Zusammensetzung der $k_{\varphi\chi}^\xi$ -fach gezählten $C_{\xi,\psi}$, die $C_{\varphi,\chi\psi}$ durch Transformationen der $C_{\varphi\chi,\psi}$ mit den zu den Geraden $f_\varphi f_\chi, f_\psi$ gehörigen Permutationsmatrizen $V_{\varphi\chi,\psi}$. Endlich bezeichnet J_χ die Einheitsmatrix vom Grade f_χ . — Aus der Separabilität von $K\Omega$ folgt für das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ eine Regularitätsbedingung im folgenden Sinne. Sie betrifft nur die $C_{\chi,\bar{\chi}}$, wobei $\bar{\chi}$ den adjungierten Charakter bezeichnet, und besagt, daß die Matrizen $(4, 10) \mathfrak{B}_1(P_{\chi,\chi} C_{\chi,\bar{\chi}})$ regulär sind. Diese Matrizen sind vom Grade f_χ und sind so zu bilden: Man nehme

die erste (d. h. dem einfachen Bestandteil entsprechende) Zeile von $P_{x,\bar{x}} C_{x,x}$, die nach (4, 6) aus f_x^2 Elementen besteht, die den Spaltenindizes in $\Gamma_x, \Gamma_{\bar{x}}$ zugeordnet sind; diese Elemente werden nach k, k als Zeilen- bzw. Spaltenindex zur Matrix in (4, 10) umgeordnet. — Das läßt sich auch umkehren, womit folgendes Hauptergebnis der Arbeit entsteht: Unter den gemachten Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen wird die Gesamtheit der galoisschen Algebren K/Ω mit vorgegebener Galoisgruppe \mathfrak{G} — oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gesamtheit der galoisschen Körper K_0/Ω mit irgendwelchen Untergruppen \mathfrak{G}_0 von \mathfrak{G} als Galoisgruppen — auf Grund der verallgemeinerten Kummer-Erzeugung (4, 6) [mit der Eigenschaft (4, 2) und der expliziten Angabe (4, 3) durch eine Normalbasis von K/Ω] umkehrbar eindeutig und invariant gekennzeichnet durch die Gesamtheit der Klassen \mathfrak{C} kommutativer assoziativer regulärer Faktorensysteme in Ω zur Charakteralgebra \mathfrak{K} von \mathfrak{G} im Sinne von (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), und zwar derart, daß K_0/Ω der Kernkörper der durch das Multiplikationsschema (4, 6) gelieferten galoisschen Algebra ist. — Verf. setzt in mehreren einleitenden Paragraphen auseinander, wie die Verallgemeinerung „abelsch \rightarrow galoissch“ notwendig zu diesem Satz führen muß, selbst die Analogie ist auch schon nach einem Vergleich mit I einleuchtend. Der Beweis des Satzes erfordert ziemlich viele Rechnungen, die in der Darstellungstheorie wurzeln; der leitende Gedanke ist, daß die Basisdarstellungen von K/Ω durch die von G auf Grund der definitionsgemäßen Isomorphie beherrscht werden. — Zum obigen Hauptsatz bemerkt Verf., daß sich die („eentlichen“) Körper unter allen K/Ω sicherlich durch gewisse Irreduzibilitätseigenschaften (vgl. I) der Faktorensystemklassen C auszeichnen lassen, ihre Aufstellung wäre nach Erledigung (mit den hier entwickelten Mitteln) der Existenzfrage galoisscher Körper K/Ω mit vorgegebener Galoisgruppe \mathfrak{G} zu erwarten. Weitere Schwierigkeiten bietet, daß \mathfrak{C} kein unabhängiges [sondern ein an (4, 7) gebundenes] Invariensystem bildet. Er macht noch auf einige weitere Probleme aufmerksam, betont aber mit Nachdruck, daß die (auch in I erwähnten) Aussichten zu einer Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie und des Reziprozitätsgesetzes das wichtigste Moment bilden, auf dieses Problem hofft er (teils durch seine Schüler) zurückzukommen.

L. Rédei.

Hua, Loo-Keng: On the multiplicative group of a field. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 1—6 (1950).

Soit K un corps non commutatif, $K_1, K_2, \dots, K_r, \dots$ la suite décroissante des groupes de commutateurs successifs du groupe multiplicatif de K . Dans un travail antérieur [Mem. Amer. math. Soc. 2, 109 (1951)] l'A. a montré que K_1 engendre K sur le centre Z de K . Par une utilisation ingénieuse de la forme des commutateurs successifs $x_j = (y, x_{j-1})$, où x et y sont deux éléments de commutateur dans le centre de K , et x_1 est le commutateur $(y, 1 - x)$, il montre que chacun des groupes K_r engendre K sur Z (bien que la suite des K_r puisse avoir tous ses termes distincts).

Jean Dieudonné.

Kurepa, Georges: Sur une définition et une ordination des nombres complexes. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 2, Nr. 1/2, 1—18 und französ. Zusammenfassg. 18 (1950) [Serbisch].

L'ensemble K des nombres complexes est défini comme la totalité des transformations réelles uniformes de l'ensemble $\{0, 1\}$ composé des éléments neutres 0 et 1 du corps C des nombres réels; l'ensemble K est ordonné (partiellement) par le procédé suivant: si $f, g \in K$, alors la relation $f \leq g$ est équivalente au système $f(0) \leq g(0)$, $f(1) \leq g(1)$. — La somme $f + g$ des $f, g \in K$ est définie par les formules de distribution $(f+g)(0) = f(0) + g(0)$, $(f+g)(1) = f(1) + g(1)$; le produit fg des éléments $f, g \in K$ est défini par les formules $(fg)(0) = f(0)g(0) = f(1)g(1)$, $(fg)(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0)$. Le plongement du continu linéaire C dans le continu complexe K se fait par la convention que, quelque soit le nombre réel x , on l'identifie avec l'élément de K transformant 0 et 1 en x et 0 respectivement. — Si la transformation identique de $\{0, 1\}$ est désignée par i , on démontre que, pour tout $f \in K$, $f = f(0) + i f(1)$. — L'ordination (par-

tielle) précédente entraîne la structure topologique ordinaire de K . Si l'on dit d'un groupe additif ordonné qu'il est archimédien, si quels que soient ses éléments a, b la relation $a > b$ entraîne $na \leq b$ pour presque tous les nombres naturels n , alors on démontre que l'ensemble $(K; \leq; +; \cdot)$ est un corps ordonné archimédien contenant le corps $(\mathbb{C}; \leq; +; \cdot)$ des nombres réels. (Autoreferat.)

Zahlkörper:

Wang, Shianghaw: An existence theorem for abelian extension over algebraic number fields. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 25—27 (1950).

In einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 36, 158) hatte Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Grunwaldschen Existenzsatzes unter Beschränkung auf den zyklischen Fall von Primzahlpotenzgrad hergeleitet. Hier gewinnt er daraus durch Zusammensetzung eine entsprechende Bedingung für den allgemeinen abelschen Fall. Eine solche Bedingung gab auch Ref. (dies. Zbl. 39, 31).

Helmuth Hasse.

Krasner, Marc: Le produit complet et la théorie de la ramification: préliminaires. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1103—1105 (1949).

Krasner, Marc: Le produit complet et la théorie de la ramification: extra-modules; résumé de l'ancienne théorie. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1287—1289 (1949).

Krasner, Marc: Le produit complet et la théorie de la ramification: résumé de l'ancienne théorie (fin): la nouvelle théorie. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 162—164 (1950).

In seiner Dissertation [Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 4^e, II. S. 11, 1—110 (1937)] und in einer Reihe von Noten [C. r. Acad. Sci., Paris 219, 345—347, 473—476, 539—541 (1944); 220, 28—30 (1945); 221, 737—739 (1945)] hat Verf. die Hilbertsche Verzweigungstheorie auf den Fall nicht-galoisscher Erweiterungen verallgemeinert. Den Begriff der Galoisschen Gruppe ersetzte dabei für eine nicht-galoissche Erweiterung K des Körpers k der Begriff der Galoisschen Hypergruppe der rechten Nebenklassen von $G_{K^*/k}$ nach $G_{K^*/K}$ (wo K^* eine K enthaltende galoissche Erweiterung von k ist). — Der „Quotient“ von $G_{K^*/k}$ nach $G_{K^*/K}$ läßt sich aber auch als eine Permutationsgruppe auffassen; nämlich als die Darstellung von $G_{K^*/k}$ mit Hilfe der rechten Nebenklassen nach $G_{K^*/K}$. In den vorliegenden 3 Noten wird die Verzweigungstheorie des Verf. mit Hilfe dieser Auffassung neu formuliert. Verf. bedient sich dabei einer Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, die von ihm und dem Ref. ausgearbeitet wurde [dies. Zbl. 38, 162 und Acta Sci. math., Szeged 13, 208—230 (1950)].

Leo Kaloujnine.

Zahlentheorie:

Mordell, L. J.: Note on cubic equations in three variables with an infinity of integer solutions. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25.9.—1.10.1949), 77—79 (1950).

Vgl. dies. Zbl. 36, 162.

Helmuth Hasse.

Shapiro, Harold N.: On the iterates of a certain class of arithmetic functions. Commun. pure appl. Math., New York 3, 259—272 (1950).

Suppose f is a function which is defined on the positive integers, takes positive integral values, and has the following three properties: i) the ratio $f(mn)/[f(m)f(n)]$ depends only on the greatest common divisor of m and n , ii) $f(1) = f(2) = 1$, iii) $2 \leq f(n) < n$ for $n > 2$. If $n > 2$, let $C_f(n)$ be the unique positive integer k such that $f^k(n) = 2$, where f^k denotes the k th iterate of f : let $C_f(2) = C_f(1) = 0$. The author has proved earlier [Amer. math. Monthly 50, 18—30 (1943)] that if f is the Euler φ -function, then (*) $C_f(mn) = C_f(m) + C_f(n) + \varepsilon(m, n)$, where $\varepsilon(m, n)$

is 0 or 1 according as the greatest common divisor of m and n is odd or even. In the present paper, the author shows that if f is an arbitrary function of the type described above, then (*) holds if and only if $f(p)$ is even and $C_f(2f(p^2)/f(p)) = C_f(p)$ for every odd prime number p .

Paul T. Bateman.

Ostmann, Hans-Heinrich: Über die Anzahl der Elemente von Summenmengen. J. reine angew. Math. 187, 222—230 (1950).

Im ersten Teil der Arbeit beweist Verf. eine untere Abschätzung für die Anzahlfunktion $C(n)$ der Summe \mathfrak{C} zweier Zahlenmengen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} durch die Anzahlfunktionen gewisser aus \mathfrak{A} und \mathfrak{B} konstruierter Mengen. Das Ergebnis verschärft eine von P. Scherk [Ann. Math., Princeton, II. S. 42, 538—546 (1941); dies. Zbl. 27, 157] angegebene Formel; beim Beweis werden frühere Ergebnisse des Verf. [Deutsche Math. 6, 213—247 (1941); dies. Zbl. 26, 202] herangezogen. Beim Übergang zu den Dichten erweist sich die erhaltene Abschätzung als schwächer als der Mann-Dysonsche Satz; für spezielle Werte von n kann er jedoch bessere Schranken als dieser liefern. — Der zweite Teil der Arbeit ist vom ersten unabhängig. In Ergänzung der Beispiele von Zahlenmengen, die Verf. in seiner oben zitierten Arbeit gegeben hatte, werden Beispiele dafür konstruiert, daß zu gegebenen Zahlen α, β mit $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$, α und β nicht beide rational, sich stets zwei die Null enthaltende Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ so angeben lassen, daß für die Anzahlfunktionen zugleich

$$\begin{aligned} \lim_{n=1,2,\dots} \frac{A(n)}{n} &= \lim_{n=0,1,\dots} \frac{A(n)+1}{n+1} = \lim_{n=1,2,\dots} \frac{A(n)}{n} = \alpha, \\ \lim_{n=1,2,\dots} \frac{B(n)}{n} &= \lim_{n=0,1,\dots} \frac{B(n)+1}{n+1} = \lim_{n=1,2,\dots} \frac{B(n)}{n} = \beta, \\ \lim_{n=1,2,\dots} \frac{A(n)+B(n)}{n} &= \lim_{n=0,1,\dots} \frac{A(n)+B(n)+1}{n+1} = \lim_{n=1,2,\dots} \frac{A(n)+B(n)}{n} = \alpha + \beta, \\ \lim_{n=1,2,\dots} \frac{C(n)}{n} &= \lim_{n=0,1,\dots} \frac{C(n)+1}{n+1} = \lim_{n=1,2,\dots} \frac{C(n)}{n} = \alpha + \beta \end{aligned}$$

gelten.

Alfred Stöhr.

Salem, R. and D. C. Spencer: On sets which do not contain a given number of terms in arithmetical progression. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 23, 133—143 (1950).

Verff. bringen in Ergänzung einer früheren Note [Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 561—563 (1942)] einige Bemerkungen über solche Mengen von Zahlen, die keine arithmetische Progression von $n+2$ Gliedern enthalten (n fest gegeben); solche Mengen werden als P -Mengen bezeichnet. — Es werden Beispiele von P -Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen angegeben, deren Anzahlfunktion $v(x)$ ein $O(x^\alpha)$ ist ($0 < \alpha < 1$). Auf schärfere Resultate in dieser Richtung, die die Verff. (a. a. O.) und F. A. Behrend [Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 331—332 (1946)] erzielt haben, wird hingewiesen. — $N(x)$ sei die Maximalanzahl der einer Menge S angehörigen ganzen Zahlen, die in einem abgeschlossenen Intervall der Länge x liegen, wobei S alle P -Mengen durchläuft. Es wird gezeigt, daß $N(x)/x$ für $x \rightarrow \infty$ einem Limes η zustrebt und daß aus $\eta = 0$ ein bekannter Satz von vander Waerden [Nieuw Arch. Wiskunde, Amsterdam 15, 212—216 (1927)] über die Existenz arithmetischer Progressionen in gewissen Teilmengen von Abschnitten der natürlichen Zahlenreihe folgen würde. — Einige weitere, vielleicht zu vermutende Eigenschaften von P -Mengen werden durch Gegenbeispiele widerlegt. — Ferner betrachten die Verff. Verallgemeinerungen auf Mengen reeller Zahlen und auf Mengen von Gitterpunkten und konstruieren dazu Beispiele.

Alfred Stöhr.

Hua, Loo-Keng: An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 48—61 (1949).

Folgende Sätze werden bewiesen: Satz 1: Es seien $N \geq 2, l, k$ und s positive

ganze Zahlen, $s \geq \frac{1}{4}k(k+1) + lk$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ reell, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ und $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$, ferner setzen wir

$$S = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \sum_{x=1}^N \exp(2\pi i f(x));$$

dann ist

$$(1) \quad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S|^{2s} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_k \leq (7s)^{4sl} (\log N)^{2l} \cdot N^{2s-q},$$

wo $q = \frac{1}{2}k(k+1)(1 - (1 - 1/k)^l)$; die linke Seite von (1) ist gleich der Anzahl der simultanen Lösungen des Gleichungssystems: $\sum_{i=1}^s x_i^h = \sum_{i=1}^s y_i^h$, $h = 1, 2, \dots, k$, in ganzen Zahlen x_i, y_i ($1 \leq x_i \leq N$, $1 \leq y_i \leq N$, $i = 1, 2, \dots, s$). Satz 3 (folgt aus Satz 1):

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=1}^N \exp(2\pi i \alpha x^k) \right| d\alpha \leq s^k (7s)^{4sl} (\log N)^{2l} N^{2s-q}.$$

Satz 5: Wenn $R \geq 10$ und $|\alpha - h/q| < 1/q^2$ mit $(h, q) = 1$, $N \leq q \leq N^{k-1}$, so ist

$$\left| \sum_{x=1}^N \exp(2\pi i \alpha x^k) \right| \leq C N^{1-1/\sigma},$$

wo $\sigma = 4k^2(\log k + \frac{1}{2} \log \log k + 3)$ und C eine positive Konstante [$C = C(k)$] bedeuten. — Verf. weist darauf hin, daß durch Anwendung obiger Ergebnisse auf das Waring-Goldbachsche Problem eine Erniedrigung der Anzahl der nötigen Primzahlen erreicht werden kann (weniger als $4k \log k$ k -te Primzahlpotenzen genügen für die Darstellung von hinreichend großen Zahlen für $K \geq K_0$).

Alfred Rényi.

Parry, C. J.: The p -adic generalisation of the Thue-Siegel theorem. Acta math., København 83, 1—100 (1950).

This paper contains complete proofs of all the results announced earlier by the author [J. London math. Soc. 15, 293—305 (1940)]. They concern generalisations of certain results of Mahler which were themselves extensions of Siegel's theorems. Siegel [Math. Z. 10, 173—213 (1921)] proved that if ξ is an algebraic number of degree $m \geq 2$ over the rationals and $\beta = \min_{s=1, \dots, m-1} (m/(s+1) + s)$ then there exist only finitely many pairs of rational integers p, q satisfying $|\xi - p/q| \leq q^{-(\beta+\varepsilon)}$ for every $\varepsilon > 0$. He also proved a similar theorem where approximations are made by algebraic numbers instead of rationals. Mahler (this Zbl. 6, 105, 156) generalised Siegel's results to the case where approximations are made, by rational numbers, simultaneously to a finite number of roots, lying one in each of a p -adic completion of the rationals (one of the p is the infinite prime spot of the rational number field), of an irreducible polynomial with rational coefficients. Mahler obtained also estimates for the number of these approximating rational number pairs and used these results to find certain properties of binary forms with rational integral coefficients. The author here generalises all these results of Mahler. In the author's work the approximations are made by algebraic numbers belonging to a field K . The quantities to be approximated are roots of a polynomial, with integral coefficients in K , which lie one in each of a completion of K by a valuation of K (the archimedian valuations are also included among these). The results obtained and the methods used are analogous to those of Mahler. A typical result of the author's concerning binary forms is the following: Let $f(x, y)$ be a binary form with coefficients integral in K and let $f(x, 1)$ have at least three different roots. Let d be the absolute value of discriminant of K . If u, v run through integers of K satisfying $N(u, v) \leq d^{\frac{1}{2}}$ and $\text{Max}(Nu, Nv) \rightarrow \infty$ then the maximum of the norms of the prime ideals dividing $f(u, v)$ tends to infinity. Here N denotes absolute value of norm.

K. C. Ramanathan.

Analysis.

Mengenlehre:

Mostowski, Andrzej: Some impredicative definitions in the axiomatic set-theory. *Fundamenta Math.*, Warszawa **37**, 111—124 (1950).

Verstehen wir unter S das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem für die Mengenlehre und unter S' das Bernays-Gödelsche, so hat I. L. Novak (vgl. dies. Zbl. **39**, 245) gezeigt, daß aus der Widerspruchsfreiheit von S sich die von S' ergibt. Da dieser Beweis in S' formalisierbar ist, so ergibt sich nach dem bekannten Gödelschen Satz, daß die Widerspruchsfreiheit von S nicht in S' beweisbar ist. Da andererseits S' aus S durch Hinzufügung der Variablen des nächsthöheren Typs entsteht, kann mit den Mitteln von S' eine befriedigende Wahrheitsdefinition [nach Tarski: *Studia philos.* **1**, 261—405 (1936); dies. Zbl. **13**, 289] von S gegeben werden. Daß andererseits die Widerspruchsfreiheit von S nicht in S' zu beweisen ist (wobei hier immer die Widerspruchsfreiheit von S vorausgesetzt wird), kann dann nur so möglich sein, daß gewisse Eigenschaften des Wahrheitsbegriffes nicht in S' abgeleitet werden können. Eine genauere Analyse dieses Sachverhalts führt den Verf. zum Beweise der folgenden drei Sätze: I. Es gibt einen Ausdruck $\mathfrak{B}(x)$ von S' mit der einzigen freien Variablen x von der Art, daß $\mathfrak{B}(n) \equiv \Phi$ beweisbar ist, falls Φ irgendein konkreter Ausdruck von S und n seine Gödelsche Nummer ist. Dagegen ist der allgemeinere Satz „Falls x die Gödelsche Nummer eines Theorems von S ist, gilt $\mathfrak{B}(x)$ “ nicht beweisbar. II. Es gibt in S' einen Ausdruck $\mathfrak{T}(x)$ derart, daß $\mathfrak{T}(1)$ und $(n)(\mathfrak{T}(n) \rightarrow \mathfrak{T}(n+1))$ beweisbar sind, nicht aber $(n)\mathfrak{T}(n)$. Die Variable n soll dabei den Bereich der in S' definierten ganzen Zahlen durchlaufen. III. Es gibt einen Ausdruck $\mathfrak{F}(x)$ von S' , für den es nicht beweisbar ist, daß ihm eine Klasse (im Bernays'schen Sinne) entspricht.

Wilh. Ackermann.

Neubauer, Miloš: Sur quelques simplifications de la théorie axiomatique d'ensembles de von Neumann. *Časopis Mat. Fys.*, Praha **74**, Nr. 3, 142—144 und tschechische Zusammenfassung. 144 (1950).

Vorliegende Mitteilung bezieht sich auf die Arbeit von J. von Neumann: Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Z.* **27**, 669—752 (1928), und zeigt, daß die dort gegebenen Ableitungen an einigen Stellen etwas einfacher gefaßt werden können. So kann Satz 12b ohne Axiom V, 3, nur mit Hilfe von V 2 bewiesen werden; die Anwendung von Satz 3b kann in einfacherer Form erfolgen, und eine im Satz 1a eingeführte Funktion ist entbehrlich.

Wilh. Ackermann.

Sikorski, Roman: On an ordered algebraic field. *C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, Cl. III **41**, 69—95 und polnische Zusammenfassung. 96 (1950).

Geordnete algebraische Ringe und Körper werden hier unter dem Gesichtspunkt der allgemeinen Theorie der geordneten Mengen betrachtet. Jedem geordneten algebraischen Ring (Körper) A wird eine reguläre Anfangszahl, sein Charakter zugeordnet; diese ist die kleinste Ordinalzahl α , zu der eine transfinite Folge $a_\xi (a_\xi \in A; \xi < \alpha)$ existiert, die mit A nach Hausdorff konfinal (oder auch koinitial) ist. [Vgl. Hausdorff, *Math. Ann.*, Leipzig **65**, 435—505 (1908), S. 440.] In jedem geordneten Körper K vom Charakter ω_μ läßt sich der Limes einer transfiniten Folge $a_\xi (\xi < \omega_\mu)$ von Elementen aus K so definieren, daß dieser Limes die wesentlichen Eigenschaften des Limes einer abzählbaren Folge von reellen Zahlen besitzt. — Zu jeder regulären Anfangszahl ω_μ lassen sich ein geordneter Ring R_μ und eine geordnete Körper K_μ dieses Charakters konstruieren, und zwar so, daß R_μ und K_μ alle Ordinalzahlen $< \omega_\mu$ enthalten und die Komposition der Elemente mittels Henssenbergs „natürlicher Addition“ und „natürlicher Multiplikation“ der Ordinalzahlen geschieht. R_μ und K_μ stehen zu der Menge P_μ der Ordinalzahlen $< \omega_\mu$ in der gleichen Beziehung wie die Menge der ganzen und die der rationalen Zahlen zu der der positiven ganzen Zahlen. Jeder geordnete alge-

braische Ring (Körper) vom Charakter ω_μ enthält einen zu $R_\mu(K_\mu)$ isomorphen Unterring (Unterkörper). Für K_μ gilt ein Analogon zu dem Satze von Bolzano-Weierstraß. *Wilk. Ackermann.*

Fodor, G. and I. Ketskeméty: Some theorems on the theory of sets. *Fundamenta Math.*, Warszawa **37**, 249—250 (1950).

Sia E un insieme non vuoto. Se H è l'insieme di tutti i sottoinsiemi r di E e R una relazione tra gli elementi $x \in E$ e gli insiemi $r \in H$ con la proprietà che per ogni $r \in H$ vi sia uno e un solo $x \in r$ tale che $x R r$, gli AA. si pongono, nell'indirizzo di Sierpinski e Piccard: a) Il problema di determinare la potenza dell'insieme E_1 degli elementi $x \in E$ per ognuno dei quali la potenza dell'insieme degli $r \in H$ corrispondenti, secondo la relazione R , sia $\leq n$, n essendo al più eguale alla potenza di E . Indicando con z la potenza di E_1 , viene provato che è: $2^z - 1 \leq n z$. b) Il problema di determinare, assegnato un insieme E numerabile e l'insieme H di tutti i sottoinsiemi finiti di E , la potenza dell'insieme E^* degli elementi $x \in E$ che corrispondono, secondo la relazione R , a una infinità numerabile di insiemi $r \in H$. Viene provato che la potenza di E^* è \aleph_0 . c) Il problema di determinare, essendo E un insieme qualunque assegnato, n un numero cardinale minore della potenza di E , H l'insieme di tutti i sottoinsiemi di E , la potenza dell'insieme E_1 degli $x \in E$ ognuno dei quali corrisponde, secondo la relazione R , a insiemi $r \in H$, la cui potenza è $\leq n$. Viene provato che E_1 ha al più la potenza n . *Landolino Giuliano.*

Kurepa, Georges: Sur les ensembles ordonnés dénombrables. *Periodicum math.-phys. astron.*, Zagreb, II. S. **3**, 145—150 und kroatische Zusammenfassg. 151 (1948).

Indicando, secondo Cantor, con η , Ω , i tipi d'ordine, rispettivamente, dell'insieme dei numeri razionali e dei numeri ordinali della prima e della seconda classe, ordinati secondo la grandezza dei loro elementi, e con pX la potenza dell'insieme X , è noto che: $p\eta = \aleph_0$, $p\Omega = \aleph_1$. D'altra parte il tipo d'ordine d'ogni insieme ordinato al più numerabile è al più eguale a η^3 e se a è un numero ordinale qualunque $< \Omega$, si ha $a \leq \eta$, essendo l'insieme ordinato dei numeri ordinali $< a$ al più numerabile e di tipo d'ordine a^4 . — Se E è un insieme ordinato, si indichi con ΓE il limite superiore dei tipi d'ordine di tutti i sotto-insiemi ben ordinati di E . Si ha dunque: $p\eta = \aleph_0$, $\Gamma\eta = \Omega$. Si indichi con tE il tipo d'ordine di un insieme ordinato E . — L'A. dimostra i due seguenti interessanti teoremi: Teorema I. La relazione: $tE = \eta$ è equivalente alle due: $pE = \aleph_0$, $\Gamma E = \Omega$. — Teorema II. Se E è un insieme ordinato ed E^* indica l'insieme dei punti di E ordinati con la relazione inversa di quella ordinante E , si ha che la relazione $\Gamma E + \Gamma(E^*) < \Omega$ è equivalente alle due: $pE \leq \aleph_0$, η non $\leq tE$ ed è dunque caratteristica per gli insiemi ordinati al più numerabili e aventi la proprietà di non contenere alcun sotto-insieme F tale che, tra ogni coppia di punti di F vi siano altri punti di F . *Landolino Giuliano.*

Kurepa, Djuro: Binäre Relationen, Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* **1**, Nr. 3/4, 53—58 (1949) [Serbokroatisch].

Eine binäre Relation in einer Menge S wird als irgendeine Vorschrift f definiert, durch die jedem $x \in S$ eine gewisse (leere oder nichtleere) Menge $f(x) \subseteq S$ zugeordnet wird. Wenn man anstatt $y \in f(x)$ $y \varrho x$ schreibt, so bekommt man die gewöhnliche Schreibweise der binären Relationen. Es wird bewiesen: dafür, daß in S eine Äquivalenzrelation existiert, ist notwendig und hinreichend, daß es ein Element o , eine Obermenge $O \ni o$, und eine eindeutige Zuordnung f von S^2 auf O gibt, so daß: 1. $f(x, x) = o$ (o -Reflexivität), 2. $f(x, y) = o \rightarrow f(y, x) = o$ (o -Symmetrie), 3. $f(x, y) = o = f(y, z) \rightarrow f(x, z) = o$ (o -Transitivität). Eine Ordnungsrelation (binäre reflexive, transitive u. teilweise symmetrische Relation) \leq hängt immer mit einer Äquivalenzrelation zusammen; die teilweise Symmetrie der Relation \leq bedeutet, daß für äquivalente Punkte x, y sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ gilt. Die Kroneckersche Funktion Signum verallgemeinernd, wird der folgende Satz bewiesen: Dafür, daß eine Menge S teilweise geordnet wird, ist not-

wendig und hinreichend, daß es eine eindeutige Abbildung $\text{sgn}(x, y)$, ($x, y \in S$) von S^2 auf eine gewisse Obermenge M der dreigliedrigen Menge $\{a, b, c\}$ gibt, so daß die folgenden Bedingungen stattfinden: 1. (Reflexivität) $\text{sgn}(x, x) = b$ ($x \in S$); 2. (Antisymmetrie) $\text{sgn}(x, y) = \beta \text{sgn}(y, x)$ ($x, y \in S$), wo β irgendeine eindeutige Abbildung von M auf sich selbst ist, die die Punkte a und c vertauscht und b fest läßt; 3. (Transitivität) $\text{sgn}(x, y) \in \{a, b\}$, $\text{sgn}(y, z) \in \{a, b\} \rightarrow \text{sgn}(x, z) \in \{a, b\}$ und sogar $\text{sgn}(x, z) = a$, wenn mindestens einer der $\text{sgn}(x, y)$, $\text{sgn}(y, z)$ gleich a ist. Falls $M = \{a, b, c\}$ (gewöhnlich $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$), ist S sogar geordnet [es genügt, $\text{sgn}(x, y) = a$ bzw. $= b$ bzw. $= c$ bzw. $\text{sgn}(x, y)$ non $\in \{a, b, c\}$ als $x < y$ bzw. $x = y$ bzw. $x > y$ bzw. $x || y$ zu deuten]. (Autoreferat.)

Sierpiński, Waclaw: Sur une propriété des ensembles ordonnés. Fundam. Math., Warszawa 36, 56—67 (1949).

Hausdorff hatte bewiesen, daß jede geordnete Menge mit einer Teilmenge der lexikographisch geordneten Menge aller Komplexe $(x_1, x_2, \dots, x_\tau, \dots)_{\tau < \vartheta}$ ähnlich ist, wo ϑ eine geeignete Ordnungszahl bedeutet und die x_τ einer wohlgeordneten „Basis“-Menge entnommen werden, wobei man schon mit einer Basis auskommt, die aus 3 Elementen besteht. (Dieses und die folgenden Zitate von Hausdorff beziehen sich auf seine Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, Kap. VI, § 7 und 8. Ref.) Verf. verschärft dieses Ergebnis zu dem Satz 1: Jede geordnete Menge der Mächtigkeit \aleph_ν , unter ν eine beliebige Ordnungszahl ≥ 0 verstanden, ist einer Menge von Folgen vom Typus ω_ν ähnlich, welche aus den Ziffern 0 und 1 gebildet und nach ersten Differenzen geordnet sind. — Der Beweis stützt sich auf die beiden, an sich Interesse beanspruchenden Hilfssätze: Hilfssatz 1: Ist ϑ eine unendliche Ordnungszahl und bezeichnet U_ϑ die Menge aller unendlichen Folgen von Typus ϑ , die aus den Ziffern 0 und 1 bestehen und nach ersten Differenzen geordnet sind, so gibt es in U_ϑ keine Lücken. — Hilfssatz 2: U_ϑ ent-

hält keine wohlgeordnete Teilmenge von größerer Mächtigkeit als ϑ . — Zum Beweis von Satz 1 denkt sich Verf. eine geordnete Menge E von der Mächtigkeit \aleph_ν gegeben und ihre Elemente in eine Folge $u_1, u_2, \dots, u_\xi, \dots$ ($\xi < \omega_\nu$) vom Typus ω_ν gebracht. Er definiert sodann eine Doppelfolge $\{a_\eta^\xi\}_{\eta < \omega_\nu}^{\xi < \omega_\nu}$ aus den Ziffern 0 und 1 nach einer Induktionsvorschrift und zeigt, daß die Menge $T = \{a_\eta^\xi\}_{\eta < \omega_\nu}^{\xi < \omega_\nu}$, wobei $a_\eta^\xi = \{a_\eta^\xi\}_{\eta < \omega_\nu}$ ist, mit der gegebenen Menge E ähnlich wird, d. h., daß gleichzeitig mit $u_\xi \prec u_\eta$ auch $a_\eta^\xi \prec a_\eta^\eta$ gilt für $\xi < \omega_\nu$, $\eta < \omega_\nu$ und umgekehrt. [Der Beweis vereinfacht sich, wenn man bei der induktiven Herstellung der Doppelfolge der a_η^ξ in die Induktionsvoraussetzung hinsichtlich $\alpha < \omega_\nu$ außer dem Vorhandensein der Elemente $a_{2\eta}^\xi, a_{2\eta+1}^\xi$ ($\xi < \alpha$, $\eta < \alpha$) noch die Hypothese aufnimmt, daß aus $u_\xi \prec u_\eta$ für $\xi < \alpha$, $\eta < \alpha$ auch $\{a_\xi^\xi\}_{\xi < 2\alpha} \prec \{a_\xi^\eta\}_{\xi < 2\alpha}$ folgen solle. Auf Grund der Definition der Folgen $\{a_\xi^\xi\}_{\xi < 2(\alpha+1)}$ ($\xi \leq \alpha$) ergibt sich dann, daß die Folge $\{a_\xi^\alpha\}_{\xi < 2(\alpha+1)}$ zu den Folgen $\{a_\xi^\xi\}_{\xi < 2(\alpha+1)}$ ($\xi < \alpha$) in derselben Ordnungsbeziehung steht wie u_α zu den u_ξ ($\xi < \alpha$), und damit ist zugleich der Satz 1 bewiesen. Ref.] — Unmittelbar aus Hilfssatz 2 fließt als Satz 2, daß man in Satz 1 die Zahl ω_ν nicht durch eine kleinere ersetzen kann. — Da U_{ω_ν} die Mächtigkeit 2^{\aleph_ν} besitzt, so ist mit

Satz 1 gezeigt, daß zu jeder Ordnungszahl $\nu \geq 0$ eine Menge der Mächtigkeit 2^{\aleph_ν} gehört, welche zu jeder geordneten Menge der Mächtigkeit \aleph_ν eine ähnliche Teilmenge enthält. Dieses Ergebnis läßt folgende Verschärfung zu. Satz 3: Zu jeder Ordnungszahl $\nu = \mu + 1$ gibt es eine geordnete Menge der Mächtigkeit 2^{\aleph_μ} , bestehend aus Elementen von U_{ω_ν} , welche zu jeder geordneten Menge der Mächtigkeit \aleph_ν eine ähnliche Teilmenge enthält. — Zum Beweis bildet Verf. diejenige Teilmenge H_ν von U_{ω_ν} , deren Folgen $\{a_\eta\}_{\eta < \omega_\nu}$ „schließlich“ aus Nullen bestehen (d. h. die weniger als \aleph_ν Einsen enthalten), und zeigt, daß H_ν eine η_ν -Menge im Sinne Hausdorffs ist und die Mächtigkeit 2^{\aleph_μ} besitzt. Nach Hausdorff enthält aber eine η_ν -Menge zu jeder geordneten Menge der Mächtigkeit \aleph_ν eine ähnliche Teilmenge. [Für Zahlen $\nu = \mu + 1$ hatte Hausdorff den obigen Satz 3 implizit ausgesprochen; Beispiele für die gewünschten Mengen der Mächtigkeit 2^{\aleph_μ} bilden bei ihm seine Mengen vom „homogenen Normaltypus“

$\eta_{\mu+1} = (1 + 1 + 1)_{\mu+1}^{\omega_{\mu+1}}$, welche zugleich $\eta_{\mu+1}$ -Mengen sind. Verf. hat also mit seiner Menge H_ν ($\nu = \mu + 1$) ein weiteres Beispiel einer $\eta_{\mu+1}$ -Menge der Mächtigkeit 2^{\aleph_μ} gefunden, deren

Typus nach Hausdorff durch $(0 + 1 + 1)_{\mu+1}^{\omega_{\mu+1}}$ zu bezeichnen wäre. Ref.] — Den Abschluß bilden einige Betrachtungen, welche mit den oben zitierten von Hausdorff in Zusammenhang stehen.

W. Neumer.

Sierpiński, Waclaw: Sur la décomposition des espaces métriques en ensembles disjoints. *Fundam. Math.*, Warszawa **36**, 68—71 (1949).

L'A. démontre le théorème suivant: Si chaque sous-ensemble ouvert non vide d'un espace métrique M contient $\geq m \geq \aleph_0$ points, l'espace est somme de m ensembles disjoints dont chacun contient $\geq m$ points de tout ensemble ouvert non vide $\subset M$. Corollaire: Tout espace métrique condensé, M , est somme d'une infinité indénombrable d'ensembles disjoints condensés et denses dans M . *Etienne Fényi*.

Sierpiński, Waclaw: Sur les séries infinies de nombres ordinaux. *Fundam. Math.*, Warszawa **36**, 248—253 (1949).

Verf. beweist folgenden Satz: Ist eine Reihe vom Typus ω von Ordnungszahlen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ gegeben und geht man durch Umordnung der Summanden wieder zu einer Reihe vom Typus ω über, so erhält man für diese Reihen insgesamt nur endlich viele verschiedene Summenwerte. Bei unendlichen Reihen von anderem Typus als ω gilt dieser Satz im allgemeinen nicht, wie Verf. an Beispielen zeigt. U. a. gibt es Reihen vom Typus ω_1 , die bei Umordnung ihrer Glieder \aleph_1 verschiedene Summenwerte liefern. — Es folgen einige Bemerkungen über endliche (zwei- und dreigliedrige) Reihen von Ordnungszahlen. U. a. wird gezeigt, daß aus einer dreigliedrigen Reihe $\alpha + \beta + \gamma$ durch Permutation höchstens 5 verschiedene Werte entstehen können, während es Produkte aus 3 Faktoren $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ gibt, die bei Permutation 6 verschiedene Werte annehmen. Andererseits läßt sich auch zu jeder Zahl $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ein Tripel von Ordnungszahlen beibringen, deren Summe, in beliebiger Reihenfolge gebildet, genau i verschiedene Werte liefert. *W. Neumer*.

Wakulicz, A.: Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux. *Fundam. Math.*, Warszawa **36**, 254—266 (1949).

Verf. untersucht, wieviel verschiedene Werte eine Summe von endlich vielen Ordnungszahlen $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ annehmen kann, wenn die Summanden beliebig untereinander vertauscht werden. Das Problem ist im wesentlichen zahlen-theoretischer Natur, insofern zu seiner Lösung die Cantorsche Darstellung $\alpha = \omega^{\alpha'} \alpha' + \omega^{\alpha''} \alpha'' + \dots + \omega^{\alpha^{(k)}} \alpha^{(k)}$ verwendet wird, wobei $\alpha \geq \alpha' > \alpha'' > \dots > \alpha^{(k)} \geq 0$ ist und $k, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k)}$ natürliche Zahlen sind. Die Zahl α' heißt der Grad von α . Wenn n Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gegeben sind, von denen k_i ($i = 1, \dots, s$; $1 \leq s \leq n$) den Grad λ_i haben, wobei $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s \geq 0$ sein soll (es ist also $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$), dann entsprechen den $n!$ Permutationen der α_i höchstens $(1) k_1(1 + k_2 2^{k_2-1}) \dots (1 + k_s 2^{k_s-1})$ verschiedene Werte ihrer Summe. — Verf. bezeichnet mit m_n die größtmögliche Anzahl von Summenwerten, welche überhaupt durch Permutation von n Ordnungszahlen geliefert werden kann, und mit q_n das Maximum des Ausdrucks (1) unter den Bedingungen $k_1 + \dots + k_s = n$ und $1 \leq s \leq n$ (k_1, \dots, k_s natürliche Zahlen). Demnach ist $m_n \leq q_n$. — Es stellt sich heraus, daß $k_1 = 1$ genommen werden darf, wenn der Ausdruck (1) gleich q_n ist; also ist q_n das Maximum des Ausdrucks

$$(2) \quad f(k_2, \dots, k_s) = (1 + k_2 2^{k_2-1}) \dots (1 + k_s 2^{k_s-1})$$

unter der Bedingung $k_2 + \dots + k_s = n - 1$ ($2 \leq s \leq n$). — Verf. gibt zu jeder natürlichen Zahl n solche Ordnungszahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ an, welche, in allen möglichen Reihenfolgen addiert, q_n verschiedene Summenwerte liefern. Daher ist auch $q_n \leq m_n$, also $m_n = q_n$. — Anschließend gewinnt Verf. aus einer näheren Untersuchung der Ausdrücke (2) die folgende Bestimmung von q_n für $n > 20$: $q_n = f(k_2, \dots, k_s) = (1 + 5 \cdot 2^4)^t (1 + 6 \cdot 2^5)^r = 81^t 193^r$, wobei der zugehörige Ausdruck (2) eindeutig fixiert ist wie folgt: es ist $s = t + r = \varphi(n) = E\left(\frac{n-1}{5}\right)$, und $r = n - 1 - 5 \varphi(n)$ von den k_i sind gleich 6, die restlichen gleich 5. Also kommt

(3) $m_n = 81^{6\varphi(n)-n+1} \cdot 193^{n-1-5\varphi(n)} \left[\varphi(n) = E\left(\frac{n-1}{5}\right) \right]$ für $n > 20$. Die Zahlen m_1, \dots, m_{20} werden einzeln berechnet; u. a. wird $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = f(2) = 5$.

$m_4 = f(3) = 13$, $m_5 = f(4) = 33$ usw. (Die Relation $m_3 = 5$ wurde von Sierpiński auf anderem Wege gefunden, vgl. vorsteh. Referat.) — Ist k eine natürliche Zahl $\leq m_n$, so kann man fragen, ob es n Ordnungszahlen gibt, welche, in beliebiger Reihenfolge addiert, genau k verschiedene Summenwerte hervorbringen. Es sei E_n die Menge aller dieser k , für welche die Antwort bejahend ausfällt; N_n sei die Menge aller natürlichen Zahlen $\leq n$. Dann ist $E_n \subset N_{m_n}$; im einzelnen gilt $E_1 = N_{m_1} = N_1$, $E_2 = N_{m_2} = N_2$. Nach Sierpiński ist ferner (vgl. vorsteh. Referat) $E_3 = N_{m_3} = N_5$, und nach einem früheren Ergebnis des Verf. gilt auch noch $E_4 = N_{m_4} = N_{13}$. Hingegen ist, wie Verf. u. a. mittels eines zahlentheoretischen Hilfssatzes von Sierpiński zeigt, $E_5 \neq N_{m_5}$, und zwar gilt $E_5 = N_{33} - \{30\}$.

W. Neumer.

Sierpiński, Waclaw: Sur un ensemble plan singulier. Fundamenta Math., Warszawa 37, 1—4 (1950).

Si $A \simeq B$ veut dire que les ensembles A et B sont superposables par translation ou par rotation, l'A. a établi les théorèmes 1 et 2 que voici: 1. E étant un ensemble linéaire, il existe au plus un point $p \in E$ tel que $E - \{p\} \simeq E$; 2. Il existe un ensemble plan E contenant deux points distincts p_i , tels que $E - \{p_i\} \simeq E$ ($i = 1, 2$). — L'A. se demande s'il y a un ensemble non vide E extrait d'un espace euclidien tel que $E - \{p\} \simeq E$ ($p \in E$) [dans l'espace de Hilbert C_ω un ensemble pareil E existe; tel est l'ensemble des points de C_ω dont l'une coordonnée est 1, alors que les autres sont 0].

Georg Kurepa.

Sierpiński, Waclaw: Le dernier théorème de Fermat pour les nombres ordinaux. Fundamenta Math., Warszawa 37, 201—205 (1950).

Alors que le fameux „théorème de Fermat“ n'est encore ni prouvé ni réfuté, l'A. prouve que le théorème de Fermat est faux pour les nombres ordinaux (par exemple $1^\lambda + 2^\lambda = 3^\lambda$ pour tout ordinal λ de seconde espèce; cf. Th. 3). — C'est que de $(\omega^\xi) + (\omega^\xi \cdot 2)^n = (\omega^\xi \cdot 3)^n$ on déduit que, quel que soit l'ordinal μ , on a trois ordinaux $\alpha, \beta, \gamma > \mu$ vérifiant $(1) \alpha^\lambda + \beta^\lambda = \gamma^\lambda$ pour tout nombre ordinal λ de première espèce (Th. 1 et Th. 2); on peut même supposer que les trois nombres dans (1) soient tous distincts; si λ est de seconde espèce, alors (1) entraîne $\beta^\lambda = \gamma^\lambda$ (Th. 5). — L'hypothèse de Goldbach n'est pas vraie non plus pour les nombres ordinaux quelconques. Par exemple, $\omega + 10$ n'est pas somme de deux ordinaux premiers; ω^2 n'est même pas somme d'un nombre fini d'ordinaux premiers.

Georg Kurepa.

Sierpiński, Waclaw: L'équivalence par décomposition finie et la mesure extérieure des ensembles. Fundamenta Math., Warszawa 37, 209—212 (1950).

(A) Ist E Teilmenge des euklidischen Raumes R_n ($n \geq 1$), beschränkt und von positivem, n -dimensionalem äußeren Lebesgueschen Maß $\bar{m}(E)$, so existiert zu jedem reellen μ mit $\mu > \bar{m}(E)$ eine Teilmenge H des R_n , für welche $\bar{m}(H) = \mu$ und welche im R_n endlich zerlegungsgleich ist mit E , d. h. es gibt eine natürliche Zahl k und paarweise fremde Teilmengen E_κ von E bzw. H_κ von H , $\kappa = 1, \dots, k$, derart, daß $E = \bigcup E_\kappa$ und $H = \bigcup H_\kappa$ und daß E_κ kongruent ist zu H_κ , $\kappa = 1, \dots, k$. — Der Beweis wird mit Hilfe der Kontinuumshypothese ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) geführt; wie Verf. bemerkt, gelingt der Beweis auch ohne diese Hypothese. — (B) (1) Ist E eine (1- bzw. 2-dimensional) Lebesgue-meßbare Menge im R_1 bzw. im R_2 , so existiert keine (im R_1 bzw. R_2) mit E endlich zerlegungsgleiche Menge F , für welche $\bar{m}(F) < \bar{m}(E)$. — (2) Für $n \geq 3$ gilt hingegen: Ist E eine beschränkte Teilmenge des R_n mit $\bar{m}(E) > 0$, so existiert zu jedem reellen μ mit $0 < \mu < \bar{m}(E)$ eine mit E endlich zerlegungsgleiche Menge H , für welche $\bar{m}(H) = \mu$.

Otto Haupt.

Sierpiński, Waclaw: Sur les types d'ordre des ensembles linéaires. Fundamenta Math., Warszawa 37, 253—264 (1950).

L'A. étudie l'ensemble partiellement ordonné ($E; \leq$) constitué des ensembles linéaires de puissance du continu et ordonné de manière que $A \leq B$ veut dire

que A est semblable à un sous-ensemble de B . En particulier, l'A. prouve que $(E; \leq)$ est sans aucun point initial (Th. 1), que $(E; \leq)$ contient un sous-ensemble de puissance du continu et qui est bien ordonné (Th. 3), inversement bien ordonné (Th. 2) et sans points comparables distincts (Th. 4 et Th. 5), respectivement. En particulier, le type d'ordre λ du continu linéaire est un élément de $(E; \leq)$; λ y est sans aucun prédécesseur immédiat (Th. 7); λ n'est ni somme ni limite de \aleph_0 types d'ordre $< \lambda$ (Th. 8 et Th. 9). L'ensemble $(E; \leq)$ contient deux éléments $< \lambda$ sans aucun prédécesseur (Th. 10). — Les théorèmes 1—7 et 9 furent énoncés dans une note précédente (v. ce Zbl. 38, 32).

Georg Kurepa.

Kaluza jr., Theodor: Struktur- und Mächtigkeitsuntersuchungen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen. Math. Ann., Berlin 122, 235—258 (1950).

Einen zusammenhängenden, kreislosen unendlichen Graph, dessen Knotenpunkte von endlichem Grade sind und der genau einen Anfangspunkt A hat, nennt Verf. Fächer; V_p bezeichnet einen solchen Graph, in dem jeder Knotenpunkt vom Grade p ist. Man numerierte mit $0, \dots, p-1$ die Kanten, die in einem Knotenpunkt von V_p zusammenstoßen. Dann kann man jedem A -Weg (von A ausgehender unendlicher Weg) einen p -adischen Bruch $x = 0, a_1 a_2 \dots$ ($0 \leq x \leq 1$) entsprechen lassen; den A -Wegen, die in einem Teilfächer von V_p liegen, entsprechen abgeschlossene lineare Punktmengen. Im ersten Teil dieser Arbeit untersucht Verf. Struktur- und Mächtigkeitsfragen bezüglich Fächer, die leicht formuliert und anschaulich bewiesen werden können, in dem zweiten Teil verwendet er seine Resultate in der Lehre der linearen Punktmengen (vgl. auch das folgende Referat). So bekommt er u. a. viele bekannte Sätze, wie z. B. den Cantor-Bendixsonschen Satz über die Ableitungen, dessen Bairsche Verallgemeinerung, usw. Erwähnen wir folgende Sätze: Eine nicht abzählbare Punktmenge in $(0, 1)$ ist niemals wohlgeordnet. Ist M eine abzählbare, abgeschlossene lineare Punktmenge, so liegen in jeder Umgebung jedes Häufungspunktes von M noch isolierte Punkte von M . *Etienne Fény.*

Kaluza jr., Theodor: Zur Rolle der Epsilonzahlen bei der Polynomdarstellung von Ordinalzahlen. Math. Ann., Berlin 122, 321—322 (1950).

Es seien α, β gegebene transfinite Ordinalzahlen, und $\alpha = \beta^{\alpha_0} \gamma_0 + \dots + \beta^{\alpha_n} \gamma_n$ ($\alpha_0 > \dots > \alpha_n \geq 0$; $\beta > \gamma_0, \dots, \gamma_n > 0$) die bekannte eindeutige Darstellung. Die „Exponenten erster Stufe“ $\alpha_i = \alpha_i^{(1)}$ ($i = 0, \dots, n$) seien ebenso in der Basis β dargestellt; diese Darstellung definiert die Exponenten zweiter Stufe $\alpha_{ik}^{(2)}$, usw. Verf. beweist den folgenden Satz: Zu jeder Ordinalzahl α gibt es eine natürliche Zahl n_α derart, daß alle Exponenten n_α -ter Stufe entweder gleich Null oder Epsilonzahlen sind. Zur Beweismethode vgl. vorsteh. Referat. *Etienne Fény.*

Kaluza jr., Theodor: Zu einer Wachstumsfrage bei Zuordnungen zwischen Ordinalzahlen. Math. Ann., Berlin 122, 323—325 (1950).

Unter dem von den Ordnungszahlen $\sigma < \tau$ gebildeten Intervall (σ, τ) versteht Verf. die Menge aller α mit $\sigma < \alpha < \tau$. Eine in (σ, τ) definierte transfinite Funktion $\beta(\alpha) < \alpha$ wird in (σ, τ) bestimmt divergent genannt, wenn es zu jedem $\beta_0 < \tau$ ein $\alpha_0 \in (\sigma, \tau)$ gibt, so daß $\beta(\alpha) \geq \beta_0$ für $\alpha \geq \alpha_0$ gilt. Ein von Alexandroff-Urysohn gefundener und von Dushnik verallgemeinerter Satz läßt sich dann so aussprechen, daß kein Intervall $(0, \omega_{\delta+1})$ eine bestimmt divergente Funktion $\beta(\alpha) < \alpha \in (0, \omega_{\delta+1})$ zuläßt. — Verf. beweist nun einen Satz, dessen Formulierung sich durch die folgende einfachere und den Beweis erleichternde ersetzen läßt: Satz 1. Ist die Limeszahl τ mit der Zahl ϑ konfinal, so gibt es in $(0, \tau)$ genau dann eine bestimmt divergente Funktion, wenn es in $(0, \vartheta)$ eine solche gibt. [Eine Teilmenge Δ des Intervalles $(0, \tau)$ von der vom Verf. charakterisierten Art ist nämlich nichts anderes als die Wertmenge einer in $(0, \vartheta)$ definierten Normalfunktion τ_ν ($\nu \in (0, \vartheta)$) mit $\tau = \lim_{\nu < \vartheta} \tau_\nu$. — In vorstehender Formulierung enthält Satz 1 den vom Verf. ge-

sondert bewiesenen Satz 2 als Spezialfall. Ref.] — Als einfache Folgerungen aus Satz 1 gewinnt Verf. die beiden Sätze: $\tau = \omega_1$ ist die kleinste Limeszahl, für welche in $(0, \tau)$ keine bestimmt divergente Funktion $\beta(\alpha) < \alpha$ existiert. — ω_{ω_1} ist die kleinste singuläre Anfangszahl, unterhalb derer keine bestimmt divergente Funktion definiert werden kann.

W. Neumer.

Łoś, Jerzy: Un théorème sur les superpositions des fonctions définies dans les ensembles arbitraires. Fundamenta Math., Warszawa 37, 84—86 (1950).

Soit E un ensemble quelconque; pour un $n \in N$ (N = l'ensemble des nombres naturels), soit E^{n*} l'ensemble des transformations de E^n en E ; soit $E^* = \bigcup_n E^{n*}$

($n \in N$). Alors, en généralisant certains résultats de M. Sierpiński [Fundam. Math., Warszawa 24, 209—212 (1935); ce Zbl. 11, 106, et Fundam. Math., Warszawa 33, 169—175 (1945)] et de M. Webb [Amer. J. Math. 58, 193—194 (1936), ce Zbl. 13, 243,] l'A. démontre le théorème que voici: Quelle que soit la suite infinie $f_n \in E^*$ ($n \in N$), il existe une fonction $\varphi \in E^{2*}$ telle que chacune des fonctions f_n ($n \in N$), soit une superposition finie de φ .

Georg Kurepa.

Kelley, J. L.: The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice. Fundamenta Math., Warszawa 37, 75—76 (1950).

The author shows (confirming a conjecture of S. Kakutani) that the axiom of choice is a consequence of the theorem of Tychonoff stating that the Cartesian product of compact topological spaces is compact. The proof consists in the adjoining to each of the non-void sets X_a , $a \in A$, a single point A and in the assigning a topology for the sets $X_a + \{A\}$ such that the obtained spaces are compact and that the sets X_a are closed (the last condition is not precisely formulated by author). Applying Tychonoff's Theorem to the family of the sets $X_a + \{A\}$ it is easily seen that the Cartesian product $\prod_{a \in A} X_a$ is non-void, that is the axiom of choice holds.

Karl Borsuk.

Rindung, Ole: Ein Beweis für die Möglichkeit, die reellen Zahlen in mehr als abzählbar viele elementfremde und kongruente Mengen von positivem äußeren Lebesgueschen Maß aufzuteilen. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festskr. t. J. Nielsen, 16—17 (1950) [Dänisch].

Aus einer Hamelschen Basis für die reellen Zahlen konstruiert Verf. die im Titel angegebene Aufteilung.

Gustav Lochs.

Zich, O. V.: Ein Beitrag zur Theorie der ganzen Zahlen und der eindeutigen Transformationen. Rozprawy II, Trždy České Akad. 58, Nr. 11, 12 S. (1948) [Tschechisch].

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• Ayre, H. G.: Basic mathematical analysis. New York: McGraw-Hill 1950. XVI, 584 p. \$ 5,00.

• Richmond, D. E.: Fundamentals of the calculus. New York: McGraw-Hill 1950. XI, 233 p. \$ 3,00.

• Natanson, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Variablen. Moskau-Leningrad: Staatsverlag f. techn. theoret. Lit. 1950. 399 S. 16,40 R. [Russisch].

Das vorliegende Buch ist ein Lehrbuch der Theorie der reellen Funktionen. Es beschäftigt sich im wesentlichen mit der sog. „metrischen Theorie reeller Funktionen“, d. h. mit dem Teile der Disziplin, bei dem die Maßeigenschaften reeller Funktionen im Vordergrund stehen. An Vorkenntnissen wird die elementare Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. — Die ersten beiden Kapitel haben einen einleitenden Charakter. Sie enthalten die Grundbegriffe der Mengenlehre und der Punktmengenlehre auf der reellen Geraden. — Im 3. Kap. begründet Verf. die Lebesguesche Maßtheorie auf der reellen Geraden. Die Invarianz des Lebesgueschen Maßes gegenüber Bewegungen wird nachgewiesen. Im Anschluß an ein Beispiel einer nichtmeßbaren Menge diskutiert Verf. die Möglichkeiten einer Verallgemeinerung des Lebesgueschen Maßbegriffes. Das Kapitel schließt mit dem Beweis (nach S. Banach) des Vitalischen Überdeckungssatzes. — Das 4. Kap. bringt den Begriff der meßbaren Funktion. Elemen-

tare Eigenschaften meßbarer Funktionen werden bewiesen. Die Begriffe der Konvergenz „fast überall“ und der Konvergenz „dem Maße nach“ werden für Folgen meßbarer Funktionen definiert. Über den Zusammenhang dieser Konvergenzbegriffe beweist Verf. die grundlegenden Sätze von H. Lebesgue, F. Riesz und D. F. Egorov. Die Struktur einer meßbaren Funktion wird durch den Satz von N. N. Lusin klargelegt. Dieser besagt bekanntlich, daß es für eine meßbare und fast überall endliche Funktion f und für jedes $\delta > 0$ eine stetige Funktion φ gibt, die nur auf einer Menge vom Maße $< \delta$ von f verschieden ist. Es folgt der Satz von Weierstraß über die gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen durch Polynome. (Der Beweis wird nach S. N. Bernstein geführt.) Mit Hilfe dieses Satzes wird der Satz von M. Fréchet bewiesen. Dieser besagt, daß es für eine meßbare, fast überall endliche, auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f eine Polynomfolge gibt, die fast überall auf $[a, b]$ gegen $f(x)$ konvergiert. — Das 5. Kap. behandelt den Lebesgueschen Integralbegriff beschränkter Funktionen. Es enthält die grundlegenden Eigenschaften dieses Begriffes. Besonders ausführlich und anschaulich wird die Beziehung zwischen dem Riemannschen und dem Lebesgueschen Integralbegriff besprochen. — Im 6. Kap. werden die Eigenschaften summierbarer Funktionen dargelegt. Besonders eingehend werden die Fälle diskutiert, wo ein Limesübergang unter dem Integralzeichen möglich ist. — Das 7. Kap. enthält die Theorie der Funktionen mit summierbarem Quadrat und die Darstellung der Grundeigenschaften der Hilbertschen Räume. Der letzte Paragraph behandelt auch die Funktionen mit summierbarer p -ter Potenz. — Das 8. Kap. behandelt ausführlich die Theorie der Funktionen mit beschränkter Variation und die Theorie der Stieltjes'schen Integrale. — Das 9. Kap. ist den absolut stetigen Funktionen und den unbestimmten Lebesgueschen Integralen gewidmet. Eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte endliche Funktion ist absolut stetig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ gibt, daß für jedes endliche System von punktfremden Intervallen $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, für das $\sum (b_i - a_i) < \delta$ ist, $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ gilt. Es wird bewiesen, daß eine absolut stetige Funktion von beschränkter Variation ist und fast überall eine Ableitung besitzt, die eine summierbare Funktion ist. Eine Funktion besitzt die Eigenschaft (N), wenn sie eine Menge vom Maße Null auf eine Menge vom Maße Null abbildet. Absolut stetige Funktionen besitzen die Eigenschaft (N). Verf. beweist den Satz von Banach-Zarečkij: Eine Funktion mit beschränkter Variation, welche die Eigenschaft (N) besitzt, ist absolut stetig. Sodann werden Lebesguesche unbestimmte

Integrale $\Phi(x) = C + \int_a^x f(t) dt$ für summierbare Funktionen f definiert. $\Phi(x)$ ist absolut stetig und die Ableitung $\Phi'(x)$ ist fast überall gleich $f(x)$. Absolut stetige Funktionen sind unbestimmte Integrale ihrer Ableitungen. Diese Eigenschaften lassen sich verallgemeinern mit Hilfe von Begriffsbildungen wie Lebesguesche Punkte und approximative Stetigkeitspunkte einer summierbaren Funktion. Schließlich wird bewiesen, daß für die Gültigkeit von

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ die Bedingung: „ $f'(t)$ existiert überall und ist endlich und summier-

bar“ hinreichend ist. — Das 10. Kap. handelt von der Theorie der singulären Integrale und von ihrer Anwendung auf die Theorie trigonometrischer Reihen. Darüber werden grundlegende Sätze von Féjér, Lebesgue, Kolmogorov u. a. bewiesen. — Kap. 11 entwickelt die Punktmengentopologie im zweidimensionalen euklidischen Raume und die Lebesguesche Maßtheorie in diesem Raume. Eingehend behandelt wird das Hausdorffsche Beispiel einer Aufspaltung der Sphäre im dreidimensionalen Raume $S_2 = Q + R + S + T$ in punktfremde Teilmengen Q, R, S, T von der folgenden Eigenschaft: Q ist abzählbar; R, S, T sind paarweise kongruent; R ist kongruent $S + T$. — Das 12. Kap. enthält die Integrationstheorie mehrerer Veränderlichen. Die zentrale Stellung in diesem Kapitel nimmt der Satz von Fubini (über das Zurückführen von mehrfachen Integralen auf einfache Integrale) ein. — Kap. 13 entwickelt die Grundbegriffe der Theorie der allgemeinen Mengenfunktionen und gibt Anwendungen dieser Theorie auf die Integrationstheorie reeller Funktionen. — Das 14. Kap. behandelt die Mengenlehre geordneter und wohlgeordneter Mengen. — Diese Theorie wird im 15. Kap. auf die Bairesche Klassifikation Bairescher Funktionen angewandt. Dieses Kapitel enthält den Satz von Lebesgue, daß für jedes α der ersten und der zweiten Zahlklasse die α -te Bairesche Klasse nicht leer ist. Ausführlicher wird die Struktur der Funktionen der ersten Baireschen Klasse studiert. — Das 16. Kapitel entwickelt die Grundbegriffe der Funktionalanalysis. Es enthält eine Darlegung der elementaren Eigenschaften metrischer und insbesondere linearer normierter Räume, Kriterien für die Kompaktheit der Untermengen in verschiedenen linearen normierten Räumen u. a. Ein Paragraph ist dem Banachschen „Prinzip des Fixpunktes“ und seinen Anwendungen auf Existenzprobleme der Theorie der Differential- und Integralgleichungen gewidmet. — Das 17. Kap. gibt ein kurzes Referat über die Forschungsergebnisse sowjetischer Mathematiker auf dem Gebiete der reellen Funktionen. Diese verteilen sich auf folgende Teildisziplinen: Deskriptive Funktionentheorie; meßbare Funktionen; Differentiation und Integration; trigonometrische Reihen; Funktionalanalysis. Auf allen diesen Gebieten sind in den letzten Jahren von sowjetischen Mathematikern entscheidende Fortschritte erzielt worden. *Leo Kaloujnine.*

● **Neumann, John von: Functional operators. Vol. I.: Measures and integrals.** (Annals of Mathematics Studies, No. 21.) Princeton: Princeton University Press 1950. 275 p. \$ 3,50.

Der vorliegende 1. Band ist eine im wesentlichen unveränderte Neuausgabe schon früher (Princeton 1933—1935) veröffentlichter Vorlesungen des Verf. Die ersten zehn Kapitel behandeln das (klassische) Lebesguesche Maß und Integral im euklidischen E_n . Im einzelnen: Kap. I. Punktmengen; Kap. II. Äußeres Maß; Kap. III. Maß; Kap. IV. Inneres Maß; Kap. V. Invarianz des Maßes bei volumtreuen affinen Transformationen; Kap. VI. Vitalischer Überdeckungssatz und (Maß-)Dichtesatz; Kap. VII. Nicht-meßbare Mengen; Kap. VIII. Das Lebesguesche Integral wird — kurz gesagt — eingeführt vermittelt des Maßes der Ordinatenmengen nicht-negativer (Punkt-)Funktionen und erweist sich dann unter anderem als lineares positives Funktional über dem Vektorraum der integrierbaren (auch komplexwertigen) Funktionen, das invariant ist gegenüber volumtreuen affinen Transformationen des Argumentes des Integranden; Kap. IX. Monotone Funktionen einer reellen Veränderlichen; Ableitungssatz. — Im X. Kap. werden sodann allgemeine Maßfunktionen untersucht, d. h. komplex-(speziell auch reell-)wertige additive bzw. absolut additive Mengenfunktionen. Im einzelnen: § 1 enthält mengenalgebraische Betrachtungen über gewisse Mengensysteme [sog. Halbringe, Ringe (= Hausdorffsche Körper) usw.] und Untersuchungen über nicht-negative Maßfunktionen; § 2. Äußere und innere Maße; § 3. Erweiterungssätze; § 4 Maßfunktionen in Produktmengen; in § 5 wird eine Reihe sehr instruktiver Beispiele von Maßfunktionen vorgeführt. Das letzte (XI.) Kapitel ist dem zu einer Maßfunktion gehörigen Integral gewidmet. § 1. Maßfunktionen von beschränkter Variation; § 2. Absolute Stetigkeit einer Maßfunktion bezüglich einer (nicht-negativen) Maßfunktion m , ferner (m)-meßbare Punktfunktionen; das (m)-Integral einer (m)-meßbaren Funktion f wird dann — kurz ausgedrückt — erklärt als bezüglich m absolut stetige (Maß-) Funktion F , für die $F(X) \leq am(X)$ falls $X \subset [f < a]$ und $F(Y) \geq am(Y)$ falls $Y \subset [f \geq a]$; Zusammenhang des Integrals mit dem Maß von Ordinatenmengen; § 3. Elementare Eigenschaften des Integrals; § 4. Integral in Produktmengen; Fubinischer Satz. — Leider ist kein Sachverzeichnis beigegeben. Eine nach Inhalt und Form ausgezeichnete Darstellung.

Otto Haupt.

Freilich, Gerald: On the measure of cartesian product sets. Trans. Amer. math. Soc. 69, 232—275 (1950).

Ist μ_q irgendein q -dimensionales Maß im euklidischen R_n ($0 \leq q \leq n$) (z. B. das Maß von Favard, Hausdorff usw.), so erhebt sich folgende Frage: Es seien A bzw. B zueinander orthogonale α - bzw. $(n - \alpha)$ -dimensionale (lineare) Unterräume des R_n , ferner seien S bzw. T m - bzw. k -dimensionale meßbare Teilmengen von A bzw. B (also mit $0 \leq m \leq \alpha$ bzw. $0 \leq k \leq n - \alpha$). Gilt dann (P) $\mu_m(S) \cdot \mu_k(T) = \mu_{m+k}(S \times T)$? — Verf. beweist hierzu u. a. folgendes: (I) Es ist (P) richtig für das (q -dimensionale) Favardsche Maß: (Ia) wenn $\alpha = n - k$, ferner S und T je Vereinigungen abzählbar vieler meßbarer S_0 bzw. T_0 mit $\mu_m(S_0) < +\infty$, $\mu_k(T_0) < +\infty$ sind; (Ib) wenn S bzw. T dehnungsbeschränktes (d. h. Lipschitz-) Bild einer m - bzw. k -dimensional Lebesgue-meßbaren Menge des R_m bzw. R_k ist; (Ic) wenn S und T Vereinigungen je abzählbar vieler S_0 bzw. T_0 sind, wobei S_0 bzw. T_0 μ_m - bzw. μ_k -meßbar von endlichem Maß sowie dehnungsbeschränktes Bild einer beschränkten Menge des R_m bzw. R_k ist. — (II) Im Anschluß an Besicovitch und Moran [J. London math. Soc. 20, 110—120 (1945)] wird im R_2 eine Menge A konstruiert, deren 1-dimensionales Hausdorffsches (bzw. sphärisches) Maß im R_2 kleiner ist als das 2-dimensionale Hausdorffsches (bzw. sphärische) Maß im R_3 des Zylinders B der Höhe 1 über A als Basis. Übrigens ist das Hausdorffsche Maß dieses B größer als das Carathéodorysche. — (III) Schließlich wird das k -dimensionale Favardsche Maß $\mu_{n,k}$ im R_n dargestellt (für $k \leq m \leq n$) durch das zweifache Integral

$$\mu_{n,k}(A) = \lambda \int_{G_n} \int_{R_m} M(A \cap [y = p_n^m(Q)]) d\Phi_n(Q) d\mu_{m,k}(y),$$

wobei λ eine Konstante, $M(\mathfrak{M})$ die Mächtigkeit der Menge \mathfrak{M} , ferner Φ_n das Haarsche Maß über der Gruppe G_n aller orthogonalen Linearabbildungen Q des R_n auf sich und $p_n^m(z) = (z_1, \dots, z_m)$, wenn $z = (z_1, \dots, z_n)$, schließlich $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Otto Haupt.

Leipnik, Roy B.: Note on preservation of measurability. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 694 (1950).

Es sei X^* bzw. Y^* eine feste Menge und x bzw. y der Boolesche (Voll-) Verband aller Teilmengen von X^* bzw. Y^* . Ferner sei $m|x$ eine Maßfunktion [d. h. eine reelle, nicht-negative Funktion mit der Eigenschaft, daß $m(\bigcup_r X_r) \leq \sum_r m(X_r)$ für beliebige $X_r \in x$, $r = 1, 2, \dots$]; wie üblich heißt $X' \in x$ m -meßbar, wenn $m(X) = m(X \cap X') + m(X - X')$ für jedes $X \in x$. Ist weiter $f(Y)|y$ eine Abbildung von y in x , so heiße $Y \in y$ m -Stetigkeitsmenge für f , wenn $m(f(Y)f(Y^* - Y)) = 0$. Es wird nun über m und f noch weiter vorausgesetzt: Für beliebige $Y \in y$, $Y_r \in y$, $r = 1, 2, \dots$, mit $Y \subset \bigcup_r Y_r$, gilt $m(f(Y)(X^* - \bigcup_r f(Y_r))) = 0$. Setzt man noch $n(Y)|y = m(f(Y))|y$, so gelten die Sätze: (1) Es ist $n(Y)|y$ eine Maßfunktion. — (2) Aus $Y' \in y$, $Y'' \in y$ folgt $n(Y'Y'') \leq m(f(Y')f(Y''))$. — (3) Ist $Y \in y$ eine m -Stetigkeitsmenge für f und ist $f(Y)$ m -meßbar, so ist Y n -meßbar. (Bemerkung des Ref. Alles gilt unverändert, wenn an Stelle der Mengenverbände Boolesche σ -Verbände gesetzt werden.) Otto Haupt.

Ingham, A. E.: Improper integrals as limits of sums. J. London math. Soc. **24**, 44—50 (1949).

Von A. E. Ingham [J. London math. Soc. **20**, 171—180 (1945)] und A. Wintner (dies. Zbl. **34**, 40) rührt der folgende interessante Satz über die Darstellung uneigentlicher Integrale als Grenzwerte spezieller Riemannscher Summen her: $\Phi(t)$ sei in $0 < t \leq 1$ stetig oder allgemeiner in $0 < t \leq 1$ definiert und in jedem Teilintervall $(0 <) \delta \leq t \leq 1$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Für $0 < h < 1$ sei ferner $S(h) = \sum_{n \leq 1/h} \Phi(nh)h$ ($n \geq 1$ ganz), $I(h) = \int_h^1 \Phi(t) dt$. Strebt $S(h) \rightarrow S$ (endlich) für $h \rightarrow +0$, so strebt auch $I(h) \rightarrow I$ für $h \rightarrow +0$, und es ist $S = I$. (Satz A). — Dieser Satz hängt eng mit dem Primzahlsatz zusammen. Einerseits läßt sich der Beweis von Satz A etwa auf die Tatsache stützen, daß das Integral

$$(1) \int_1^\infty \frac{g(v)}{v} dv \quad \text{mit} \quad g(v) = \sum_{n \leq v} \frac{\mu(n)}{n}, \quad \text{wo } \mu(n) \text{ die Möbiussche Funktion bedeutet,}$$

absolut konvergiert. Andererseits lassen sich dem Satz A, dessen Beweis ohne Verwendung von Hilfsmitteln der Primzahltheorie allerdings noch nicht gelungen ist, verschiedene Ergebnisse dieser Theorie auf elementarem Wege entnehmen. Verf. geht der Frage nach, welcher Satz der Primzahltheorie als äquivalent mit dem Satz A anzusprechen ist. Er kommt zu dem Schluß, daß dies genau für die Tatsache der absoluten Konvergenz des Integrals (1) zutrifft. Dies ergibt sich aus dem folgenden Hauptresultat der vorliegenden Arbeit, das sich auf einen allgemeineren Typ von Riemannschen Summen bezieht: Es seien $\{l_n\}$ und $\{\lambda_n\}$ zwei streng monotone, divergente Folgen positiver Zahlen mit $0 < \lambda_1 < l_1$, $l_{n-1} \leq \lambda_n \leq l_n$ ($n > 1$). Es sei ferner $d_1 = l_1$, $d_n = l_n - l_{n-1}$ ($n > 1$), und es gelte $d_n = o(l_n)$ für $n \rightarrow \infty$. Unter K werde die Klasse der in $0 < t \leq 1$ definierten Funktionen $\Phi(t)$ verstanden, die in jedem Teilintervall $(0 <) \delta \leq t \leq 1$ beschränkt und (im Riemannschen oder Lebesgueschen Sinne) integrierbar sind. Für jede Funktion $\Phi(t)$ aus K werde

$$S(h) = \sum_{l_n \leq 1/h} \Phi(\lambda_n) d_n h \quad (h > 0) \quad \text{und} \quad I(k) = \int_k^1 \Phi(t) dt \quad (0 < k < 1), \quad \text{ferner im}$$

Falle der Existenz $\lim_{h \rightarrow +0} S(h) = S$, $\lim_{k \rightarrow +0} I(k) = I$ gesetzt. Ist $Z(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{d_n}{\lambda_n^s}$,

($s > 1$), und stellt $\frac{1}{Z(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n}{Q_n^s}$ ($0 < Q_1 < Q_2 < \dots$; $Q_n \rightarrow \infty$) die Entwicklung

von $1/Z(s)$ in eine Dirichletsche Reihe dar, so werde schließlich $\gamma(v) = \sum_{\varrho_n \leq v} \frac{\mu_{\varrho_n}}{\varrho_n}$ gesetzt. Dann stellt für jede zu K gehörige Funktion $\Phi(t)$ die Konvergenz des

Integrals $\int_0^\infty \frac{|\gamma(v)|}{v} dv$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Existenz von S die Existenz von I nach sich zieht; gegebenenfalls ist $S = I$. (Satz B). — Dem Satz B läßt sich entnehmen, daß das Fehlen von Nullstellen der Funktion $Z(s)$ in $\Re(s) > 1$ eine notwendige Bedingung dafür darstellt, daß von der Existenz von S auf die Existenz von I geschlossen werden kann. Da im allgemeinen die Nullstellenfreiheit von $Z(s)$ in $\Re(s) > 1$ nicht zu erwarten ist, so zeigt dieses Resultat, daß der von Satz A erfaßte spezielle Fall Riemannscher Summen keineswegs als typisch für die Gesamtheit der von Satz B erfaßten Fälle anzusprechen ist.

Friedrich Lössch.

Nöbeling, Georg: Eine Bemerkung über die Länge einer stetigen Kurve. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1949, 41—45 (1950).

Si B est un arc (c-à-d. l'image topologique d'un segment) en R_n , de longueur finie $l(B)$ on a $l(B) = L(B)$ où $L(B)$ est une des mesures linéaires définies dans un précédent travail de l'A. [Jber. Deutsche Math. Verein. 52, 132—160 (1942)]. L'A. généralise au cas d'une courbe continue K (c-à-d. image univoque et continue d'un segment T). Il introduit pour cela la longueur de parcours (Durchlaufungslänge) $L_f(K)$ qui se réduit à $l(B)$ pour un arc: pour toute suite finie $\{t_i\}$, $t_i \in T$, $t_{i-1} < t_i$, on forme les segments S_i joignant les images de t_{i-1} et t_i et on pose $L_f(K) = \sup_i \sum l(S_i)$. Si K_j est l'ensemble des points de K qui sont images de

j points de T , le théorème s'énonce: $L_f(K) = \sum_{j=1}^\infty j \cdot L(K_j) + \infty \cdot L(K_\infty)$. Les points essentiels de la démonstration sont: 1. les K_j ($j = 1, 2, \dots, \infty$) sont boréliens. 2. $L_f(K) = c \int n(E) \cdot \dot{E}$ où $n(E) \leq +\infty$ est le nombre de points d'intersection de K et de l'hyperplan E et où l'intégrale est prise dans l'espace des hyperplans de R_n .

André Revuz.

Ostrowski, A. M.: Generalization of a theorem of Osgood to the case of continuous approximation. Proc. Amer. math. Soc. 1, 648—649 (1950).

Let $f(t, x)$ be a continuous function for $a \leq x \leq b$, $t \geq T$ and suppose that $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x)$ is also continuous in (a, b) ; then for any given $\varepsilon > 0$ there exists a subinterval (a', b') of (a, b) and a number T_0 so that $|f(t, x) - f(x)| < \varepsilon$ for $t \geq T_0$ and $a' \leq x \leq b'$. The analogous theorem for the case of a discrete variable t tending to ∞ is due to Osgood [Amer. J. Math. 19, 161 (1897)] and the present theorem is a consequence thereof.

Janos Horváth.

Nosarzewska, M.: Sur la convergence uniforme pour quelques classes de fonctions. Colloq. math. 2, 64—67 (1949).

A sequence of real valued functions (1) $\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, defined on an open interval I is said to „approach pointwise“ a function $f(x)$ if given two positive numbers ε, η , we can find an index $k_0 = k_0(\varepsilon, \eta)$ and for each $k > k_0$ an η -dense subset $E(k)$ of I such that $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ whenever $x \in E(k)$. Among others, the following results are stated. (i) If each $f_k(x)$ is monotone and (1) approaches pointwise the continuous function $f(x)$ then (1) converges uniformly to $f(x)$ on every closed interval of I . (ii) If each $f_k(x)$ is convex in the generalized sense of Beckenbach [Bull. Amer. math. Soc. 43, 363—371 (1937); this Zbl. 16, 352] and I is bounded then (1) again converges uniformly in every closed interval of I provided this sequence satisfies at least one of the following conditions: (a) approaches pointwise a continuous function; (b) converges in a dense subset of I ; (c) converges in measure. No proofs are given.

Mauricios Matos Peixoto.

Jessen, Børge: A remark on strong differentiation in a space of infinitely many dimensions. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 54—57 (1950).

Im kartesischen Raum R_n der $X = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichne L_n das n -dimensionale Lebesguesche Maß, ferner i das System aller achsenparallelen n -dimensionalen Intervalle J und $a(X)$ das System aller gegen $X \in R_n$ konvergierenden Intervallfolgen $\{J_r\}$ mit $J_r \in i$ sowie $X \in J_r$. Ist $F(Y)$ das unbestimmte L_n -Integral der L_n -summierbaren Punktfunktionen f , so ist bekanntlich $\lim_{r \rightarrow \infty} F(J_r) : L_n(J_r) = f(X)$ für L_n -fast alle $X \in R_n$ und für jedes $\{J_r\} \in a(X)$, wenn nur $|f| (\log^+ |f|)^{n-1}$ L_n -summierbar ist. Analoges gilt für den aus dem R_n durch Reduktion mod 1 erhältlichen n -dimensionalen Torusraum Q_n . Hingegen läßt sich ein entsprechendes Theorem nicht mehr für den aus (dem unendlichdimensionalen) R_ω erhältlichen Torusraum Q_ω beweisen. Verf. konstruiert nämlich eine meßbare Menge C in Q_ω , deren Maß kleiner als 1 ist, während für das unbestimmte Integral $F(Y)$ ihrer charakteristischen Funktion und für fast alle X gilt $\lim F(J_r) : m(J_r) = 1$ bei passendem gegen X konvergierendem $\{J_r\}$; unter einem Intervall wird dabei das Produkt aus (unendlich vielen) 1-dimensionalen, im Einheitsintervall enthaltenden Intervallen verstanden, von denen höchstens endlich viele eine Länge kleiner als 1 besitzen, und „Konvergenz von $\{J_r\}$ gegen X “ besagt, daß $X \in J_r$ für alle r und daß für jedes $k = 1, 2, \dots$, die Länge des k -ten Faktors gegen Null konvergiert. Verf. weist zum Schluß darauf hin, daß es andererseits im Q_ω Funktionen f gibt, für deren Integral der im Q_n gültige Ableitungssatz zu recht besteht. *Otto Haupt.*

Peixoto, Mauricio Matos: On the existence of derivative of generalized convex functions. Summa Brasil. Math. 2, 35—42 (1948).

Etant donnée une famille \mathfrak{F} de fonctions continues $F(x)$ pour $a < x < b$, telles que par deux points de la bande $a < x < b$, il passe une courbe $y = F(x)$ et une seule, on dira que $f(x)$ est convexe par rapport à \mathfrak{F} si, quels que soient x_1 et $x_2 \in (a, b)$ on a $f(x) \leq F_{12}(x)$ pour $x_1 < x < x_2$, $F_{12}(x)$ étant la fonction $\in \mathfrak{F}$ telle que $F_{12}(x_1) = f(x_1)$, $F_{12}(x_2) = f(x_2)$. Les fonctions convexes par rapport à une famille F sont continues [cf. Beckenbach, Bull. Amer. math. Soc. 43, 363—371 (1937); ce Zbl. 16, 352]. L'A. démontre que si les nombres dérivés inférieurs à droite et à gauche de toute fonction $F(x) \in \mathfrak{F}$ sont finis presque partout, $f(x)$ convexe par rapport à \mathfrak{F} est dérivable presque partout, et que si les éléments de \mathfrak{F} ont une dérivée seconde uniformément bornée au voisinage de chaque point x , pour toutes les fonctions $F(x)$ vérifiant $F(x) = y$, $f(x)$ est dérivable sauf peut-être sur un ensemble dénombrable. *André Revuz.*

Tolstov, G. P.: Die asymptotische Ableitung einer zusammengesetzten Funktion. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 325—332 (1950) [Russisch].

Beweis der Sätze: φ sei definiert für $\alpha \leq t \leq \beta$, $F(x)$ für $\inf \varphi \leq x \leq \sup \varphi$, und die Funktionen haben überall endliche asymptotische Ableitungen. Dann gilt für die asymptotische Derivierte der zusammengesetzten Funktion $\Phi(t) = F(\varphi(t))$: $\Phi'(t) = F'(\varphi) \varphi'(t)$ fast überall (f. ü.). „Überall“ in der Voraussetzung kann nicht ohne weiteres zu „f. ü.“ abgeschwächt werden. — Weiter: $f(x)$ sei L -(Denjoy-)

integrierbar auf $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ besitze endliche (asymptotische) Derivierte, eventuell nach Ausschluß einer abzählbaren Menge. Dann hat man: $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi) \varphi'(t) dt$ [$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\varphi(t)$ beliebige absolut stetige Funktion]. Die Beweise beruhen auf Sätzen von Chinč'in [Mat. Sbornik 31, 265—285, 377—430 (1924)] und mehreren vom Verf. bereitgestellten Hilfssätzen. Die Voraussetzungen können verallgemeinert werden durch folgende Definition: $F(x)$

heißt D -derivierbar auf $[a, b]$, wenn das Intervall von einer abzählbaren Menge perfekter Mengen überdeckt werden kann, so daß $F(x)$ auf jeder dieser Mengen (relativ zu ihr) differenzierbar ist und die Ableitungen endlich sind:

Leopold Schmetterer.

Koschmieder, Lothar: Bemerkung zu einer Formel von Hermite. J.-ber. Deutsche Math.-Verein., **54**, 1. Abt., 52—54 (1950).

In this paper the author has rectified a slight inaccuracy, occurring in a formula of Hermite's. The amended formula admits of the symbolic form:

$$(1) \quad \frac{x^{n-m+q-p} y^{m-n+p-q}}{(n-p)!(m-q)!} D_{n-p, m-q} f = \frac{(xy-1)^{p+q}}{(m+p)!(n+q)!} D_{m+p, n+q} f,$$

where $f \equiv f(x, y) = (xy-1)^{m+n}$, and m, n, p, q are positive integers, such that $n \geq p$ and $m \geq q$, and the mixed differential operator D is defined by $D_{\lambda, \mu} f \equiv \partial^{\lambda+\mu} f / \partial x^{\lambda} \partial y^{\mu}$, (it being implied that λ, μ are positive integers). In the original form of (1), (as given by Hermite in his Collected Works), the factor $x^{n-m+q-p} y^{m-n+p-q}$ was dropped through inadvertence. — Writing

$$D_{n-p, m-q} f = \frac{\partial^{m-q}}{\partial y^{m-q}} \left\{ \frac{(m+n)!}{(m+p)!} (xy-1)^{m+p} y^{n-p} \right\},$$

$$D_{m+p, n+q} f = \frac{\partial^{m+p}}{\partial x^{m+p}} \left\{ \frac{(m+n)!}{(m-q)!} (xy-1)^{m-q} x^{n+q} \right\},$$

and then expanding both equations by Leibniz's theorem, the author arrives eventually at the result (1). — In the supplementary portion of the paper there is an alternative proof, due to Margarete Gawehn, who makes use of an elementary artifice, based on the binomial expansion of $y^{\mu} = [(xy-1) + 1]^{\mu} / x^{\mu}$ leading in the long run to the equality:

$$D_{\mu, \nu} f = \frac{(m+n)! \mu!}{(m+n-\mu)!} x^{\nu-\mu} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(m+n-i)!}{i! (\mu-i)! (m+n-\nu-i)!} (xy-1)^{m+n-\nu-i}$$

(where $\nu = \mu$ or $m+n-\mu$, according as $m+n-\mu-\nu \geq 0$ or < 0). A similar expression being deduced for $D_{\nu, \mu} f$ by an interchange of x, y , the authoress attributes special values to μ, ν , so as to derive the values of $D_{n-p, m-q} f$ and $D_{m+p, n+q} f$ and ultimately to corroborate the relation (1).

H. D. Bagchi.

Fine, N. J.: Proof of a theorem of Jacobi. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 666—667 (1950).

Si tratta di una dimostrazione per induzione del seguente teorema di Jacobi [J. reine angew. Math. **15**, 1—26 (1836)]: Se $G(z)$ è definita in $(-1, 1)$, è:

$$I_n \equiv \int_0^{\pi} G(\cos x) \cos nx \, dx = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \int_0^{\pi} G^{(n)}(\cos x) \sin^{2n} x \, dx.$$

Landolino Giuliano.

Hsu, L. C.: An asymptotic expression for an integral involving a parameter. Sci. Record, Acad. Sinica **2**, 339—345 (1949).

Let $f(x, y)$ ($a \leq x \leq b$, $N < y$) be a continuous function, together with $f'_x(x, y)$ and $f''_{xx}(x, y)$, such that for any y $f'_x(x, y) = 0$ at some point x and that $f''_{xx}(x, y) < 0$ throughout. Suppose further that there exists a number ξ ($a \leq \xi \leq b$) such that $f'_x(\xi, y) \rightarrow 0$ as $y \rightarrow \infty$ and finally that $f''_{xy}(x, y) \rightarrow -\infty$ and $f''_{xx}(x, y) / f''_{xx}(\xi, y) \rightarrow 1$ as $(x, y) \rightarrow (\xi, \infty)$. Then

$$\int_a^b \exp [f(x, y)] \, dx \sim \exp [f(\xi, y)] \left\{ \frac{-2\pi}{f''_{xx}(\xi, y)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

as $y \rightarrow \infty$. If $f(x, y)$ is of the form $y h(x)$, we obtain a theorem of Laplace [cf. Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, II. Abschnitt, Aufgabe 201].

Janos Horváth.

Thijssen, W. P.: Über die iterierte Potenzierung. Simon Stevin, wis.-natuurk. Tijdschr. **27**, 177—192 (1950) [Holländisch].

Soit $f(u)$ ($-\infty < u < \infty$) une fonction continue telle que l'équation $f(u) = u$ n'ait qu'un nombre fini de racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_q$. Supposons que de deux

côtés d'une racine λ_p , $f(u) - u$ ait des signes opposés et que $f(u) > u$ pour $u < \lambda_1$. Posons $f_{n+1}(u) = f(f_n(u))$ [$n = 1, 2, \dots; f_1(u) = f(u)$]. Si $f(u)$ est une fonction non-décroissante, alors dans $(-\infty, \lambda_1)$ $f_n(u)$ tend en croissant vers λ_1 pour $n \rightarrow \infty$, dans (λ_1, λ_2) $f_n(u)$ tend en décroissant vers λ_1 pour $n \rightarrow \infty$, dans (λ_2, λ_3) $f_n(u)$ tend en croissant vers λ_3 pour $n \rightarrow \infty$, etc. Lorsque $f(u)$ est non-croissante, $f_2(u)$ sera non-décroissante, les limites de $f_{2n}(u)$ seront les racines l_i de $f_2(u) = u$ et les limites de $f_{2n+1}(u)$ seront les valeurs $f(l_i)$. L'A. fait une étude détaillée des racines λ_i et l_i pour la fonction $f(u) = x^u$ et obtient comme cas particulier ($u = x$) un résultat de Barrow [Amer. math. Monthly **43**, 150—160 (1936); ce Zbl. **13**, 254] concernant la convergence de la suite ${}^{n+1}x = x^{(n)x}$ ($n = 1, 2, \dots; {}^1x = x$). Finalement l'A. considère aussi la fonction $f(u) = (ax)^{(x^u)}$. *Janos Horváth.*

Ilieff, Ljubomir: Beitrag zum Problem von D. Pompeiu. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I **44**, 309—314 und deutsche Zusammenfassg. 315—316 (1948) [Bulgarisch].

On doit à M. D. Pompéiu [Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **15**, 265—269 (1929); Bull. Sci. math., Paris, II. S. **53**, 328—332 (1929)] la présomption suivante: Soit D un domaine dans le plan (x, y) et $f(x, y)$ une fonction définie et continue dans tout le plan et telle que l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ soit égale à zéro lorsque l'intégration est étendue à un domaine D' qu'on obtient de D par un déplacement euclidien quelconque; dans ces conditions $f(x, y)$ doit être identiquement nulle. Les recherches ultérieures ont montré que cette présomption se justifie lorsque le domaine est un carré mais qu'il n'en est pas ainsi pour le cercle. L'A. démontre qu'elle est encore vraie lorsque D est un trapèze (ou un triangle) isocèle dont l'angle à la base est incommensurable avec l'angle droit. *L. Tchakaloff.*

Ilieff, Lubomir: Sur un problème de M. D. Pompeiu. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I **45**, 111—113 und bulgarische Zusammenfassg. 114 (1949).

En poursuivant ses recherches sur le problème de Pompéiu, l'A. démontre que la fonction $f(x, y) \equiv 0$ est la seule fonction continue vérifiant l'équation intégrale $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = 0$, l'intégration étant étendue à un domaine Δ' qu'on obtient du domaine triangulaire fixe Δ par un déplacement euclidien arbitraire. *L. Tchakaloff.*

Karamata, Jovan: Sur certains cas particuliers du premier théorème de la moyenne. Vesnik Drutšva Mat. Fiz. Srbije **1**, Nr. 3/4, 83—102 und französ. Zusammenfassg. 103 (1949) [Serbisch].

Dans le théorème de la moyenne, $F(b) - F(a) = (b - a) F'(\xi)$, le nombre ξ est déterminé comme fonction de a et b , $a \leq \xi(a, b) \leq b$. L'A. montre, que parmi les moyennes, définies par la relation $\varphi(\xi) = \frac{1}{b-a} (\varphi(a) + \varphi(b))$, ce ne sont que les fonctions φ , dont $\varphi'(x) = (Ax^2 + Bx + C)^{-1/2}$, où A, B et C sont des constantes arbitraires, qui sont susceptibles de satisfaire en même temps le théorème de la moyenne. Dans ce cas, la fonction $F(x)$ correspondante à la moyenne ξ ainsi définie est déterminée par $F''(x) = D\varphi'^2(x)$, où D est une constante arbitraire. — Dans le même ordre d'idées l'A. considère les moyennes plus générales

$$\xi(a, b) = \int_0^1 \phi \{ \varphi(a) p(t) + \varphi(b) q(t) \} dt,$$

où ϕ est la fonction inverse de la fonction monotone φ et p et q étant tels que $p(t) + q(t) = 1$, $p(t) = q(1 - t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Il montre que dans ce cas de même ce ne sont que les fonctions φ de forme spéciale qui fournissent des moyennes ξ satisfaisant le théorème des accroissements finis. A savoir, il faut que $y - \varphi'$ satisfasse à l'équation différentielle de la forme $P y^2 y''' - Q y y' y'' + R y'^3 = 0$, P, Q et R étant des constantes déterminées par les fonctions $p(t)$ et $q(t)$. (Autoreferat.)

Fempl, Stanimir: Sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije **2**, Nr. 1/2, 75—79 und französ. Zusammenfassg. 79 (1950) [Serbisch]. Soit $\varphi(t)$ monotone $\phi(t)$ l'inverse de $\varphi(t)$ et $u(x)$ et $v(x)$ de carrés intégrables dans (a, b) . L'A. montre que l'inégalité

$$\left| \int_a^b u(x) v(x) dx \right| \leq \phi \left\{ \frac{1}{2} \varphi \left[\int_a^b u^2(x) dx \right] + \frac{1}{2} \varphi \left[\int_a^b v^2(x) dx \right] \right\}$$

ne peut être satisfaite pour tout u et v que lorsque $\varphi(e^t)$ est convexe avec φ croissant, ou bien concave avec φ décroissant. Il en résulte, que les moyennes de la forme $\varphi\{\frac{1}{2}\varphi(A) + \frac{1}{2}\varphi(B)\}$ sont comparables entre elles et que $\sqrt{AB} [\varphi(t) = l g t]$ en est la plus petite. (Autoreferat.)

Allgemeine Reihenlehre:

Benedetti, Carlo: La funzione θ_n collegata alla costante di Eulero-Mascheroni. Periodico Mat., IV. S. 28, 169—174 (1950).

Sei $H_{n+h} = \frac{1}{1+h} + \dots + \frac{1}{n+h}$, $E_h = \sum_i \left(\frac{1}{i+h} - \log \frac{i+h+1}{i+1} \right)$ und Θ_{n+h+1}

definiert durch $E_h = H_{n+h} - \log \frac{n+h+1}{h+1} + \frac{\Theta_{n+h+1}}{n+h+1}$ ($0 \leq h \leq 1$). Dann gilt (bei festem h) $\Theta_{n+h+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$), $\Delta \Theta_{n+h+1} < 0$, $\Delta^2 \Theta_{n+h+1} > 0$. Wichtig ist der Spezialfall $h = 0$. Karl Zeller.

Cheng, Tseng Tung: The normal approximation to the Poisson distribution and a proof of a conjecture of Ramanujan. Bull. Amer. math. Soc. 55, 396—401 (1949).

Die Poissonsche Verteilungsfunktion

$$F(x) = \sum_{r=0}^n p_r \quad \text{mit} \quad p_r = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, \quad n = [x], \quad x \geq 0$$

konvergiert bekanntlich für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen die Normalverteilung. Bewiesen wird: Es sei $x = \frac{n-\lambda+\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}$. Dann gilt

$$\sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} (1-x^2) e^{-x^2/2} + \delta$$

mit $|\delta| < 0,076 \lambda^{-1} + 0,043 \lambda^{-3/2} + 0,13 \lambda^{-2}$.

G. Szegő [J. London math. Soc. 3, 225—232 (1928)] hatte die folgende Vermutung von Ramanujan bewiesen: Für jedes positive ganze n liegt der Wert von ϑ , der die Gleichung

$$\left[1 + \frac{n}{1!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \vartheta \frac{n^n}{n!} \right] e^{-n} = \frac{1}{2}$$

befriedigt, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ und strebt gegen $\frac{1}{3}$ mit $n \rightarrow \infty$. Darüber hinaus zeigt Verf.: Für $n \geq 7$ liegt die Wurzel ϑ dieser Gleichung zwischen $0,37$ und $\frac{1}{3}$, und es gilt $\vartheta = \frac{1}{3} + \frac{4}{135} n^{-1} + \frac{8}{2835} n^{-2} + O(n^{-3})$. Günther Schulz.

Wall, H. S.: On some criteria of Carleman for the complete convergence of a J -fraction. Bull. Amer. math. Soc. 54, 528—532 (1948).

Es seien $X_p(z)$, $Y_p(z)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) diejenigen Lösungen der Differenzengleichung $[a_0 = 1, a_p (\neq 0) \text{ und } b_p \text{ komplexe Zahlen}]$

$$-a_{p-1} x_{p-1} + (b_p + z) x_p - a_p x_{p+1} = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots),$$

die bzw. den Anfangsbedingungen $X_0 = -1, X_1 = 0, Y_0 = 0, Y_1 = 1$ entsprechen; sie sind dann zu den Näherungszählern bzw. -nennern im üblichen Sinne des

J -Kettenbruchs $-\frac{\infty}{p=1} \frac{K}{b_p + z}$ proportionale Größen. Verf. spricht vom „bestimmten“ oder „unbestimmten“ Fall für den Kettenbruch, je nachdem

$$\sum_{p=1}^{\infty} (|X_p(0)|^2 + |Y_p(0)|^2)$$

divergiert oder konvergiert. [Vgl. das inzwischen erschienene Buch: H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions, New York 1948, Kap. IV, V und XI; dies. Zbl. 35, 36. Zu dem genannten Referat ist berichtigend zu bemerken, daß ein J -Kettenbruch bei komplexen Elementen nicht notwendig positiv definit (im Sinne von Wall) zu sein braucht.] Ein reeller J -Kettenbruch ist im bestimmten Fall vollständig konvergent im Sinne von Hamburger [Math. Ann., Berlin 81,

235—319 (1920), S. 244]. Verf. gibt Verfahren an, um aus einem vorgelegten Kettenbruch, für den der bestimmte Fall vorliegt, allgemeinere Klassen von ebensolchen herzuleiten. Ferner beweist er von neuem auf „algebraischem“ Wege (d. h. nur unter Benützung von quadratischen Formen, ohne Integralgleichungsmethoden) den Satz von Carleman, daß für einen reellen J -Bruch vollständige Konvergenz besteht, wenn die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} (c_{2p})^{-1/2p}$ divergiert, unter c_p die Koeffizienten der korrespondierenden Potenzreihe verstanden. Verschiedene historische Bemerkungen.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Thron, W. J.: Some properties of continued fractions $1 + d_0 z + K(z/(1 + d_n z))$. Bull. Amer. math. Soc. 54, 206—218 (1948).

Ein Kettenbruch der angegebenen Form heißt zu einer formalen Potenzreihe $\mathfrak{P}(z) \equiv 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ korrespondierend, wenn bei $z = 0$ die Ordnungszahl der Differenz $\mathfrak{P}(z) - A_n(z)/B_n(z)$ für $n \rightarrow \infty$ nach ∞ strebt; hier bezeichnet $A_n(z)/B_n(z)$, wie üblich, den n -ten Näherungsbruch. Zu jeder vorgelegten Potenzreihe gibt es dann genau einen korrespondierenden Kettenbruch. Wenn der Kettenbruch in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmäßig konvergiert, ist die Potenzreihe die dortige Taylorentwicklung. Es werden verschiedene Konvergenzbedingungen angegeben, unter denen die einfachste besagt: Wenn alle $|d_n| \leq M$, dann konvergiert der Kettenbruch gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Kreises $|z| < 1 : (1 + \sqrt{M+1})^2$. Andere Sätze sichern Konvergenz in einem gewissen Winkelraum der z -Ebene, wenn die d_n sämtlich einem geeigneten Gebiet angehören, z. B. dem Durchschnitt der Innengebiete einer gewissen Parabelschar, oder einem Winkelraum. Auch Konvergenz im weiteren Sinne gegen eine in dem betreffenden Gebiet meromorphe Grenzfunktion wird betrachtet. Schließlich wird die Frage behandelt, wieweit die Beschränktheit der d_n für die Konvergenz in einer Umgebung von $z = 0$ notwendig ist; für $d_n > 0$ ist es in der Tat der Fall.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Popovitch, Božidar: La liaison des procédés de sommabilité avec les intervalles de convergence. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 121—129 und französ. Zusammenfassg. 130 (1949) [Serbisch].

Les théorèmes inverses des différents procédés de sommabilité exigent une „condition de convergence“, par ex. (1) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \{s(t') - s(t)\} \geq -w(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 1$), satisfaite dans un intervalle (t, T) qui est déterminé par une fonction $A(t)$ (continue, non décroissante et divergente) et par sa fonction inverse $V(t)$. La fonction $A(t)$ ainsi que $\varphi(t)$, définie par les conditions

$T = V\{\lambda A(t)\}$, $A(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{\varphi(u)}{u} du\right)$ et (2) $\varphi(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$, est en quelque sorte la

mesure de la puissance d'un procédé de sommabilité. Pour chaque procédé est caractéristique la plus grande fonction $\varphi(t)$ qui détermine le plus court intervalle (t, T) dans lequel $s(t)$ doit satisfaire à la condition (1), pour qu'on puisse déduire (3) $s(x) \rightarrow s(x \rightarrow \infty)$ de $J(x) \rightarrow s$

$(x \rightarrow \infty)$, $J(x) = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) ds(t)$. Si $\varphi(t)$ croît plus lentement que la fonction caractéristique,

son intervalle de convergence est plus long que celui relatif à la fonction caractéristique et à priori on déduit (3); au cas contraire, (3) ne peut en résulter, mais une conséquence moins exigeante. — L'A. analyse séparément les cas $\varphi(t) \rightarrow 0$ et $\varphi(t) \rightarrow \infty$. Le premier groupe de fonctions est borné inférieurement par la condition (2) et supérieurement par la condition $\varphi(t) \rightarrow 0$, pendant que le groupe $\varphi(t) \rightarrow \infty$ n'est borné qu'inférieurement, et l'on peut en distinguer trois cas: $T - t \rightarrow \infty$, $T - t = 0$, $T - t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Enfin l'A. suppose qu'on

peut remplacer la condition (1) par $\int_1^t \frac{\varphi(u)}{u} du \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$), sans introduire les fonctions

intermédiaires $A(t)$ et $V(t)$ avec certaines conditions supplémentaires insignifiantes, qui éliminerait les cas tels que $\varphi(t) = 1(1 + \cos t)$. (Autoreferat.)

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Stopelli, Francesco: Sulle famiglie di funzioni definite da equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti. Giorn. Mat. Battaglini **79**, 225—229 (1950).

L'A. da una dimostrazione, più semplice ed elementare di quella già data del recensore [Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. S. **4**, 120—127, (1943)] circa la natura della funzione limite di una successione di integrali di equazioni differenziali lineari omogenee di ordine $\leq n$. Luigi Amerio.

Levi, Eugenio: Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **9**, 242—246 (1950).

Se $f(x)$ è una funzione sommabile in $(0, 1)$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ e $B_n F(x)$ è l' n -esimo polinomio di Bernstein relativo alla $F(x)$,

$$B_n F(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} F\left(\frac{m}{n}\right),$$

vale allora la formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} B_n F(x) - f(x) \right| dx = 0.$$

Giovanni Sansone.

Meňšov, D.: Über die Konvergenz trigonometrischer Reihen. Acta sci. math., Szeged **12 A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 170—184 (1950) [Russisch].

Verf. stellt einige früher erhaltene Ergebnisse zusammen (vgl. auch dies. Zbl. **28**, 51; **30**, 302; **37**, 179). Folgende Sätze wurden im Zbl. noch nicht referiert: (1) Ist $f(x)$ eine 2π -periodische Funktion, integrierbar in $\langle -\pi, \pi \rangle$, stetig in $\langle a, b \rangle$, so gilt eine Darstellung $f = f_1 + f_2$, wo die f_i dieselben Eigenschaften wie f haben und Fourierreihen besitzen, die durch Klammersetzen in $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig konvergent gemacht werden können [Mat. Sbornik n. S. **15**, 385—432 (1944)]. (2) Ist $f(x)$ meßbar und fast überall endlich in $\langle -\pi, \pi \rangle$, so kann durch Abänderung von $f(x)$ auf einer Menge beliebig kleinen Maßes erreicht werden, daß die entstehende Funktion $\varphi(x)$ stetig ist und eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe besitzt [Mat. Sbornik, n. S. **11**, 69—96 (1942)].—Dies ist also eine Erweiterung des bekannten Satzes von Lusin. (3) Jede trigonometrische Reihe $T \equiv a_0/2 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ist darstellbar in der Form $T = T' + T''$, wo die trigonometrischen Reihen T' , T'' mit den Koeffizienten a'_n usw. folgende Eigenschaften haben: a) Es gilt $\lim |a'_n| \leq \lim |a_n|$ und die drei anderen entsprechenden Ungleichungen. b) Sie sind universale trigonometrische Reihen, d. h. ist eine meßbare Funktion $f(x)$ vorgegeben (bei der auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ zugelassen sind), so kann man durch Klammersetzen erreichen, daß die Reihe fast überall gegen $f(x)$ konvergiert, m. a. W.: Eine gewisse Teilfolge der Teilsummen konvergiert fast überall gegen $f(x)$ [Verf., Mat. Sbornik, n. S. **20**, 197—238 (1947)]. Karl Zeller.

Kozlov, V. Ja.: Über die Vollständigkeit des Funktionensystems $\{\varphi(nx)\}$ im Raume $L_2[0, 2\pi]$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 977—980 (1948) [Russisch].

Verf. betrachtet Funktionen $\varphi(x)$, die für alle reellen x erklärt, 2π -periodisch und in $(0, 2\pi)$ L_2 -integrierbar sind. Mit $A[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots]$ bezeichnet er die kleinste Menge von Funktionen, die die $\varphi_i(x)$ und mit einem $\varphi(x)$ auch die Funktionen $\varphi(2x), \varphi(3x), \dots$ enthält. Er fragt, wann das Funktionensystem $A[\varphi_1(x), \dots]$ in $L_2[0, 2\pi]$ vollständig ist. Von seinen Resultaten seien genannt: Satz 3': $A[1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots]$ ist genau dann vollständig, wenn es kein System

$A [1, \theta_1(x), \theta_2(x), \dots]$ gibt, mit Hilfe dessen jede Funktion aus $A [1, \varphi_1(x), \dots]$ approximierbar ist und für das gilt: $\theta_1(x)$ ist orthogonal zu $\theta_k(lx)$ für $k > 2, l \geq 1$ und für $k = 1, l > 1$; $\theta_2(x)$ ist orthogonal zu $\theta_k(lx)$ für $k \neq 2, l \geq 1$ und für $k = 2, l > 1$; $(\theta_1(x) - \lambda_1 \sin x)^2 + (\theta_2(x) - \lambda_2 \cos x)^2 \neq 0$ für beliebige feste λ_i . Besonders durchsichtig liegt der Fall $A [1, \varphi_1, \varphi_2]$. Nun sei $\mathfrak{z} = \{z_e\}$ eine Zahlenfolge mit $|z_e| < 1, \sum |z_e|^2 < \infty$ (Bezeichnung: $\mathfrak{z} \in G$); $w(n) = \prod z_e^{\alpha_e}$, wo n die Primzerlegung $n = \prod p_e^{\alpha_e}$ hat, $w(1) = 1$;

$$\Phi_1^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cos nx \varphi_k(x) dx, \quad \Phi_2^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \sin nx \varphi_k(x) dx.$$

Dann gilt: Satz 4: Ist das System $A [1, \varphi_1, \varphi_2]$ vollständig, so ist $\det(\Phi_i^{(k)}) \neq 0$ für $\mathfrak{z} \in G$; Satz 5: Aus der Determinantenbedingung folgt umgekehrt die Vollständigkeit von $A [1, \varphi_1, \varphi_2]$, wenn φ_1 und φ_2 trigonometrische Polynome sind. Daraus ergibt sich noch Satz 6: Die Zahlen a_1, \dots, a_N, \dots seien gegeben. Genau dann läßt sich zu jedem ungeraden $f(x)$ ein $u(x)$ bestimmen, das der Gleichung $\sum a_n u(nx) = f(x)$ genügt, wenn $\sum a_n w(n) \neq 0$ ist für $\mathfrak{z} \in G$. (Ohne Beweise).

Karl Zeller.

Kozlov, V. Ja.: Zur Frage der Vollständigkeit eines Funktionensystems vom Typus $\{\varphi(nx)\}$ im Raume L_2 . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 441—444 (1950) [Russisch].

Verf. setzt frühere Untersuchungen in abstrakter Form fort (siehe vorsteh. Referat — Bezeichnungen wie dort — sowie dies. Zbl. 30, 261). Der Hilbertraum H sei das direkte Produkt der Unterräume H_1 und H_2 mit den vollständigen Orthogonalsystemen $\{e_{1s}\}$ bzw. $\{e_{2s}\}$, die U_m isometrische Operatoren, $f(n)$ eine multiplikative Funktion mit $|f(k)| \leq 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Eine Menge von Systemen $\{x_{n,\alpha}\}$ mit Parameter α heißt gleichmäßig vollständig, wenn es zu jedem $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so daß die Ungleichungen $\left\| x - \sum_{n=1}^N A_n(x) x_{n,\alpha} \right\| < \varepsilon$ erfüllbar sind.

Satz 1—3: Sei $x_i = x_i(f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} e_{1k} f(k) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} e_{2k} f(k)$ ($i = 1, 2$). Ist $\{U_m(x_1), U_m(x_2)\}$ ein vollständiges System in H für $f(k) \equiv 1$, so auch für jedes f der oben genannten Art; und zwar sind die so erhaltenen Systeme gleichmäßig vollständig. Sind umgekehrt diese Systeme gleichmäßig vollständig für alle f mit $|f(k)| < 1$ für $k > 1$, so ist auch das System mit $f(k) \equiv 1$ vollständig. Satz 6: Sei $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ vollständig, $\tilde{x}_i = \sum_{n=1}^N (A_{in} U_n(x_1) + B_{in} U_n(x_2))$ ($i = 1, 2$), so ist $\{U_n(\tilde{x}_1), U_n(\tilde{x}_2)\}$ genau dann vollständig, wenn

$$\det \left(\sum_{n=1}^N \bar{A}_{in} f(n), \sum_{n=1}^N \bar{B}_{in} f(n) \right)_{i=1,2} \neq 0$$

ist für jedes f mit $|f(k)| < 1$ für $k > 1$. Eine ähnliche Frage behandelt Satz 7, während Satz 4 und 5 naheliegende Anwendungen auf den Raum $L_2 [0, 2\pi]$ bringen. Ohne Beweise.

Karl Zeller.

Kozlov, V. Ja.: Über vollständige Systeme von Orthogonalfunktionen. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 351—364 (1950) [Russisch].

Verf. zeigt: (1) Ist $\{\varphi_n\}$ in $L_2 [0, 1]$ ein vollständiges Orthonormalsystem und sind je endlich viele φ_n über jedem $E \subset (0, 1)$ mit $mE > 0$ linear unabhängig, so ist ein beliebiges nach Streichung endlich vieler φ_n erhaltenes System $\{\varphi_n^*\}$ vollständig in $L_2 [E']$, wenn $E' \subset (0, 1)$, $mE' < 1$ gilt. (2) Das System $S_q = \{1, \sin n 2\pi x, \cos n 2\pi x\}$, wo n alle natürlichen Zahlen durchläuft, in deren Primzerlegung nicht nur die ersten q Primzahlen vorkommen, ist vollständig in $L_2 [E']$ (E' wie oben). (3) Sei weiter $0 < mE^* < 1$, so kann jedes $f \in L_2 [0, 1]$ auf $(0, 1) - E^*$ so abgeändert werden, daß f in $L_2 [0, 1]$

orthogonal wird zu $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Als Anwendungen ergeben sich: (4) Es gibt eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten nicht alle verschwinden und die nach geeigneter Klammersetzung in jedem Punkt von $\langle 0, 1 \rangle$ gegen Null konvergiert, und (5) eine ebensolche Reihe, die nach Klammersetzung überall in $(0, \frac{1}{2})$ gegen ∞ divergiert. Ein weiteres Resultat bezieht sich auf universale trigonometrische Reihen (vgl. Meňšov, Referat obenstehend). Schließlich gilt: (6) Konvergiert die Reihe $\sum a_n \sin 2\pi 2^n x$ für alle x einer gewissen abzählbaren Menge gegen Null, so ist $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Karl Zeller.

Šrejder, Ju. A.: Über die Fourier-Stieltjes-Koeffizienten von Funktionen mit beschränkter Variation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 663—664 (1950) [Russisch].

$\varphi(t)$ sei von beschränkter Variation in $[0, 2\pi]$, rechtsseitig stetig, $\varphi(0) = 0$. Eine Folge reeller Zahlen in $[0, 1]$ möge S -verteilt heißen, wenn für ihre als existierend vorausgesetzte asymptotische Verteilungsfunktion $\varrho(t)$ für mindestens ein t $\varrho(t) \neq t$ gilt. Eine Menge $E \subset [0, 2\pi]$ heiße vom Typ W , wenn eine Folge ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ existiert, so daß für jedes $t \in E$ $\{n_1 t/2\pi\}, \{n_2 t/2\pi\}, \dots$

S -verteilt ist. Es gilt: $\int_0^{2\pi} e^{int} d\varphi(t) \rightarrow 0$ genau dann, wenn die Variation von $\varphi(t)$ auf jeder beliebigen Menge vom Typ W verschwindet. — $\varphi(t)$ gehöre zur Klasse J , wenn die Fourier-Stieltjes-Koeffizienten jeder beliebigen, hinsichtlich $\varphi(t)$ absolut stetigen Funktion nicht gegen 0 streben. Die Funktionen der Klasse J werden durch die Existenz einer Menge, der Vereinigung höchstens abzählbar vieler Mengen vom Typ W , charakterisiert, auf welcher genau die Variation nicht verschwindet. Die nicht ausgeführten Beweise beruhen auf 2 Hilfssätzen, deren einer lautet: $\{\beta_i^{(k)}(t)\}$ sei eine abzählbare Gesamtheit von Folgen auf $[0, 2\pi]$. Die $\beta_i^{(k)}(t)$ seien gleichmäßig in i und k beschränkt, $\beta_i^{(k)}(t)$ konvergiere schwach gegen $\beta^{(k)}(t)$. Dann existiert eine Folge natürlicher Zahlen n_1, n_2, \dots , so daß für alle k und für alle t $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_{n_j}^{(k)}(t) \rightarrow \beta^{(k)}(t)$. — Man vgl. übrigens Salem [Duke Math. J. 8, 317—334 (1941); dies. Zbl. 25, 316] und für frühere Ergebnisse R. C. Young, dies. Zbl. 13, 250.. Leopold Schmetterer.

Bochner, S.: Localization of best approximation. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 3—23 (1950).

Es wird folgender Satz bewiesen: $f(x)$ sei eine periodische Funktion der Klasse L . Unter $\{s_n(x)\}$ verstehe man eine Folge von Exponentialpolynomen $s_n(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{i\nu x}$. Es wird gezeigt, daß man die $s_n(x)$ so wählen kann, daß

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)| dx \xrightarrow{(n)} 0.$$

An Stetigkeitsstellen gilt $s_n(x) \rightarrow f(x)$. — Für eine beschränkte Funktion $f(x)$ ist $\underline{\text{fin}} f(x) \leq s_n(x) \leq \overline{\text{fin}} f(x)$. Ist in $a < x < b$ die Funktion $f(x)$ konstant: $f(x) = c$, so gilt gleichmäßig in $a + \delta \leq x \leq b - \delta$:

$$(*) \quad s_n(x) - c = O(e^{-n\varepsilon_n}),$$

wobei ε_n eine Folge von positiven Zahlen ist, die (beliebig langsam) gegen Null geht. Die Abschätzung (*) kann nicht verbessert werden. — Es wird gezeigt, wie der Approximationssatz auf fastperiodische Funktionen und auf in $-\infty < x < +\infty$ definierte nichtperiodische Funktionen, für die ein Fouriersches Integral existiert, ausgedehnt werden kann. Schließlich wird noch eine Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen angegeben. Kurt Schröder.

Szász, Otto: Gibbs' phenomenon for Hausdorff means. Trans. Amer. math. Soc. 69, 440—456 (1950).

Verf. untersucht die Frage, wann die Hausdorffschen Mittel

$$h_n = \sum_0^n C_{n,v} s_v \int_0^1 r^v (1-r)^{n-v} d\psi(r); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad C_{n,v} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)}$$

[$\psi(r)$ in $0 \leq r \leq 1$ von beschränkter Schwankung, $\psi(1) = 1$, $\psi(+0) = \psi(0) = 0$],

der Folge $s_n(t) = \sum_1^n \frac{\sin v t}{v}$ eine Gibbssche Erscheinung aufweisen. Die Ant-

wort auf diese Frage hängt von der Wahl der Funktion $\psi(t)$ ab. Für Cesàrosche Mittel der Ordnung p hatte H. Cramér [Ark. Mat. Astron. fys. 13, no. 20 (1919)] die Existenz einer Konstanten c ($0 < c < 1$) dargetan, so daß die Gibbssche Erscheinung für $p < c$ auftritt, für $p \geq c$ aber nicht mehr auftritt. Analog hierzu weist Verf. die Existenz einer Konstanten γ ($0 < \gamma \leq 1$) nach, so daß für $p < \gamma$ die Hölderschen Mittel eine Gibbssche Erscheinung aufweisen, für $p \geq \gamma$ aber nicht. Bemerkenswert ist nun, daß, wie numerische Rechnungen zeigen, die Abschätzung $0,58 < \gamma < 0,585$ gilt und somit γ erheblich größer ausfällt als die entsprechende Konstante $c = 0,4395$ bei den Cesàroschen Mitteln. Der Nachweis hierfür ergibt sich aus dem allgemeingültigen Ergebnis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t_n) = \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\sin r y}{y} dy d\psi(r) \quad \text{für } n t_n \rightarrow \tau \leq \infty$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \rightarrow 0} h_n(t) = \max_{t > 0} \int_0^1 \{1 - \psi(r)\} \frac{\sin \tau r}{r} dr.$$

Wird dieses Maximum für $\tau = \tau'$ angenommen, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \rightarrow 0} h_n(t) = \lim_{n t_n \rightarrow \tau'} h_n(t_n)$.

Viktor Garten.

Sz.-Nagy, Béla: *Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées.* Acta Sci. math., Szeged 13, 118—135 (1949).

Es sei $f(x)$ eine in $(0, \pi)$ L -integrale, positive und monoton abnehmende Funktion und es sei $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ihre Fouriersche Cosinusreihe, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ihre Fouriersche Sinusreihe. Dann ist nach A. Zygmund [Fundam. Math., Warszawa 13, 284—303 (1929)] die Reihe (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ stets absolut konvergent, die

Reihe (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ dagegen dann und nur dann absolut konvergent, wenn $f(x) \log(1/x)$

in $(0, \pi)$ L -integabel ist. Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, daß der Unterschied zwischen der Sinus- und der Cosinuserwicklung verschwindet, wenn man von (1)

und (2) zu den Reihen (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^\gamma}$ und (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\gamma}$ mit $0 < \gamma < 1$ übergeht.

Genauer erweist sich als notwendig und hinreichend für die absolute Konvergenz der Reihe (3) mit $0 < \gamma \leq 1$ die Integrabilität von $x^{\gamma-1} f(x)$ in $(0, \pi)$ [also speziell für die absolute Konvergenz der Reihe (3) mit $\gamma = 1$ die Integrabilität von $f(x)$], und für die absolute Konvergenz der Reihe (4) mit $0 < \gamma < 1$ ebenfalls die Integrabilität von $x^{\gamma-1} f(x)$, jedoch für die absolute Konvergenz der Reihe (4) mit $\gamma = 1$ die Integrabilität von $f(x) \log(1/x)$ in $(0, \pi)$. Darin sind für $\gamma = 1$ die (auf neuem Wege gewonnenen) Zygmundschen Resultate enthalten. — Die angegebenen Bedingungen bleiben auch bei gewissen Klassen nicht-monotoner Funktionen noch hinreichend für die absolute Konvergenz der Reihen (3) und (4). Dieser Tatsache läßt sich speziell eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz der Fourierreihe einer stetigen Funktion entnehmen, die in jedem endlichen Intervall

in endlich viele konvexe und konkave Teile zerfällt. — Sämtliche Resultate übertragen sich sinngemäß auf Fouriersche Integrale.

Friedrich Lösch.

Sz.-Nagy, Béla: *Méthodes de sommation des séries de Fourier. I.* Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 204—210 (1950)

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit Matrixtransformationen von Fourierreihen. Zugrunde gelegt werden Dreiecksmatrizen $A = (\lambda_{nk})$ ($n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, n$) mit reellen oder komplexen Elementen, wobei speziell $\lambda_{n0} = 1$ ($n = 0, 1, \dots$) sein soll. Mittels einer solchen Matrix werde jeder mit 2π periodischen, integrierbaren

Funktion $f(x)$ die aus ihrer Fourierreihe $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ gebildete Folge der Mittel $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{nk} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ($n = 0, 1, \dots$) zugeordnet. Verf. bezeichnet A als eine Matrix vom Typus F , falls die Summen $\sigma_n(x)$ in jedem Lebesgueschen Punkt von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergieren und überdies die Konvergenz im Innern jedes Stetigkeitsintervalls von $f(x)$ eine gleichmäßige ist. Er beweist, daß die Matrix gewiß vom Typus F ist, wenn sie die beiden folgenden

Bedingungen erfüllt: (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$); (B) $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) |A_{nk}^2| < C$

wo $A_{nk}^2 = \lambda_{n,k} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $\lambda_{n0} = 1$, $\lambda_{n,n+1} = 0$ gesetzt ist und C eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Dieses Ergebnis verallgemeinert die in früheren Arbeiten von E. Hille - J. D. Tamarkin [Trans. Amer. math. Soc. 34, 757—783 (1932); dies. Zbl. 5, 291] und S. M. Nikolskij (dies. Zbl. 30, 28) angegebenen Bedingungen.

Friedrich Lösch.

Schmetterer, Leopold: *Taubersche Sätze und trigonometrische Reihen.* Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 158, 37—59 (1950).

Die Arbeit enthält eine Reihe von Bemerkungen zu bekannten Summierbarkeits- und Konvergenzsätzen aus der Theorie der Fourierschen Reihen: (I) Es sei $f(x)$ eine gerade, L -integrierbare Funktion mit der Periode 2π und $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ihre Fourierreihe. Nach einem bekannten Satz von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. S. 3, 43—62 (1934)]

folgt aus (1) $\int_0^t |f(x)| dx = o\left(t \log \frac{1}{t}\right)$ und (2) $a_n = O(n^{-\delta})$ mit $0 < \delta < 1$

die Konvergenz der Fourierreihe an der Stelle $x = 0$. Verf. zeigt, daß mit $f(x)$ auch $f(x)g(x)$ für jede gerade, schwankungsbeschränkte Funktion $g(x)$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. — (II) Der unter (I) genannte Hardy-Littlewoodsche Konvergenzsatz läßt sich aus einem Satz über die V_α -Summierung (Valironische Verallgemeinerung des Borelschen Verfahrens) Fourierscher Reihen mittels eines Tauberschen Satzes dieses Verfahrens gewinnen. Als Gegenstück dazu beweist Verf. auf demselben Wege: $f(x)$ sei eine im Cauchy-Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion mit der Periode 2π , für die $\varphi(t) = \frac{1}{2} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] - s$

der Bedingung $\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} \varphi(u) du = o(t^{\beta+\varepsilon})$ mit $0 < \beta \leq 1$, $\varepsilon > 0$ genüge

Dann ist die Fourierreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0 konvergent zur Summe s , wenn ihre Teilsummen s_k an dieser Stelle der Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_m) \geq 0$ für $n - m = O(m^\alpha)$ mit $\alpha \geq \beta/(\beta + \varepsilon)$ genügen. [Vgl. F. T. Wang, Bull. Amer. math. Soc. 50, 420—424 (1944).] — (III) Als analoges Gegenstück zu einer von Hardy und Littlewood [a. a. O.] stammenden Modifikation des Youngschen Kriteriums beweist Verf.: Es sei $f(x)$ eine L -integrierbare Funktion mit der Periode 2π , für welche $\varphi(t)$

den Bedingungen $\int_0^t \varphi(x) dx = o(t^{1+\varepsilon})$ mit $\varepsilon > 0$ und $\int_0^t |d(x^\nu \varphi(x))| = O(t)$ mit

$1 + \varepsilon \geq \gamma > 1$ genüge. Dann ist die Fourierreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0 konvergent. — (IV) Entsprechend einem Resultat von O. Szász [Trans. Amer. math. Soc. 37, 483—500 (1935); dies. Zbl. 12, 402] über das A -Verfahren wird ein Satz bewiesen, der aus der Beschränktheit der V_α -Mittel einer trigonometrischen Reihe auf die Beschränktheit ihrer Teilsummen zu schließen gestattet. — (V) Es folgen noch einige Sätze über die Riemannsche Summierbarkeit 1. Ordnung beliebiger Reihen, denen sich u. a. entnehmen läßt: Es sei $f(x)$ eine L -integrierbare Funktion

mit der Periode 2π , für welche $\varphi(t)$ den Bedingungen $\int_0^t |\varphi(x)| dx = O\left(t \log \frac{1}{t}\right)$

und $\int_t^\pi \frac{\varphi(x)}{x} dx = o\left(\log \frac{1}{t}\right)$ genüge. Gilt dann noch für die Fourierkoeffizienten

$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$, so ist die Fourierreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0 konvergent.

Friedrich Lösch.

Spezielle Orthogonalfunktionen:

• Magnus, W. und F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Aufl. Berlin, Göttingen und Heidelberg: Springer-Verlag 1948. VIII, 230 S. DM 24.60.

Die wichtigste Neuerung in dieser Neubearbeitung eines wegen seiner erstaunlichen Stofffülle für den Praktiker wie auch für den Theoretiker der speziellen Funktionen unentbehrlichen Buches ist wohl die völlige Umgestaltung und Erweiterung des Kapitels über das Gebiet der elliptischen Funktionen. Die elliptischen Integrale sind jetzt vorausgenommen, und insbesondere die Hilfsmittel zur Herstellung der verschiedenen Normalformen vervollständigt. Später folgt dann auch eine Tafel für Integrale elliptischer Funktionen, ohne daß allerdings der Zusammenhang mit den elliptischen Integralen (durch Einführung des Integrals 1. Gattung als unabhängige Variable) ausgesprochen wäre; das wäre um so mehr zu wünschen gewesen, als an dieser Stelle in der 1. Auflage ein grundlegender Irrtum unterlaufen war (S. 111 „Das Normalintegral 2. Gattung“, 1. Satz). — Im übrigen wurden über das ganze Buch hinweg zahlreiche kleinere Versehen berichtigt und Glättungen und Bereicherungen durchgeführt. Erfreulicherweise haben sich die Verf. nun auch zur Berücksichtigung krummliniger Integrationswege im Komplexen entschlossen, die ja für die funktionentheoretische Behandlung des Gebietes unentbehrlich sind, mit denen also jeder Leser vertraut sein muß, der nicht etwa nur zur numerischen Behandlung herausdestillierte Einzelformeln sucht. Ungeändert ist der Aufbau des Ganzen: I. Gamma-Funktion, II. Hypergeometrische Funktion. III. Zylinderfunktionen. IV. Kugelfunktionen. V. Orthogonale Polynome. VI. Die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle. VII. Elliptische Integrale, Thetafunktionen und elliptische Funktionen. VIII. Integraltransformationen und Integralumkehrungen. IX. Koordinatentransformationen. Neu hinzugekommen ist ein Anhang über Fouriersche Reihen, Entwicklungen elementarer Funktionen und Summenformeln. — Da eine sinngemäße Stoffanordnung schon wegen ihrer suggestiven Wirkung zweifellos die Einsicht in die innere Struktur eines Gebiets fördert, solche Einsicht aber neben ihrem Erkenntniswert auch Nutzen für eine vernünftige Auswertung der Einzelheiten mit sich bringt, seinen nun einige Wünsche in dieser Richtung ausgesprochen. Es ist klar, daß II und IV, und andererseits III und VI systematisch zusammengehören, ob man nun vom allgemeinen zum speziellen ab-, oder vom speziellen zum allgemeinen aufsteigen will. Eine weitere mögliche Anordnung wäre IV, III, II, VI; dann folgt jeweils einer Funktionenklasse eine hieraus durch Grenzübergang zu gewinnende. V blickt bei der bisherigen Anordnung des Textes vorwärts und zurück, und müßte wohl an den Anfang, oder an den Schluß der in II—VI dargebotenen Gesamtüberschau über die durch lineare Differentialgleichungen erklärten speziellen Funktionen treten. Daneben besteht die Möglichkeit, die Polynome jeweils an die Funktionsklasse anzuschließen, als deren Grenzfälle sie erscheinen, wie dies ja ohnedies für Legendresche und Gegenbauersche Polynome schon geschehen ist. Dann wäre nur noch ein kurzer § für die gemeinsame Erzeugung auf Grund der Orthogonalität und eine Übersicht nötig. Im einzelnen wäre bei den Tschebyscheffschen Polynomen die sofortige Einführung der hier mit $U_n^*(x)$ bezeichneten Polynome an Stelle der (keinen besonderen Namen verdienenden) Produkte $\sqrt{1-x^2} U_n^*(x)$ zu empfehlen, schon wegen ihrer potentialtheoretischen Bedeutung im R_4 ($p=2$ auf S. 100). Man vermißt S. 103 eine explizite Darstellung; eine solche ist freilich im Anhang S. 218 mit enthalten, aber in völlig geänderter Bezeichnung und ohne daß der Zusammenhang hergestellt wäre. Bei den Jacobischen Polynomen sollte die von Szegő in dem grundlegenden Werk „Orthogonal Polynomials“ (New York 1939; dies. Zbl. 23, 215) konsequent durchgeführte Bezeichnungsweise eingeführt

werden, bei der das Intervall $(-1, +1)$ zugrunde liegt und der Übergang zu den Spezialfällen stets bequem durchführbar ist. -- Der Anhang wäre wohl am besten an den Beginn des Ganzen zusetzen. Die hier (allerdings ohne diesen geläufigen Namen) eingeführten Bernoullischen Polynome kämen dadurch in die Nachbarschaft des Bereichs der Gamma-Funktion, wo sie systematisch hingehören (ihre Differenzengleichung S. 215 zu der der Ψ -Funktion S. 3 und ihrer Ableitungen); sie könnten dann bei der sicherlich wegen ihrer praktischen Wichtigkeit erwünschten Eulerschen Summenformel verwendet werden. Im Anhang finden sich auch die elementaren Produkt- und Partialbruchdarstellungen für trigonometrische Funktionen; man vermißt aber die mit den Bernoullischen und Eulerschen Zahlen zusammenhängenden Potenzreihen für $\cot x$ und andere, die gewiß schwerer gedächtnismäßig festzuhalten sind als jene. Raum für solche Erweiterungen könnte durch Wegfall von Wiederholungen gewonnen werden (Def. der Bernoullischen Zahlen S. 5 und S. 215; gesonderte Einführung der „Laguerreschen Funktionen“ S. 124 statt einfachen Hinweises auf eine leicht abweichende Bezeichnungsweise). Endlich würde eine konsequente Numerierung der Formeln (etwa seiten- oder paragraphenweise) Verweisungen im Text (die an vielen Stellen wegen der Verstreutheit innerlich zusammengehöriger Dinge erwünscht wären) und bei Notizen erleichtern und damit den Gebrauchswert des Werkes noch erhöhen.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

●Guillet, A. et M. Aubert: *Propriétés des polynômes électrosphériques*. (Mémoires des Sciences Mathématiques Nr. 107). Paris: Gauthier-Villars 1947. 54 p.

Verff. gehen davon aus, daß bei der Lösung der elektrostatischen Aufgabe einer leitenden Ebene und einer leitenden Kugel das Spiegelungsverfahren angewandt werden kann. Bekanntlich führt dieses Spiegelungsverfahren mit einer unendlichen und konvergierenden Reihe von Spiegelungspunkten und einer entsprechenden Reihe von Spiegelladungen auch beim Problem zweier verschiedener leitender Kugeln zu einer Lösung. Bei der weiteren Verfolgung der Aufgabe einer leitenden Ebene und einer leitenden Kugel (Kapazitäten, Influenzkoeffizienten, elektrostatische Kräfte) sind verschiedene Folgen von Polynomen aufgetaucht, welche Verff. näher betrachten wollen. Sie erwähnen, daß die gleichen Folgen auch bei ganz anderen physikalischen Problemen auftreten: Fortpflanzung von Röntgenstrahlen in Kristallen und Schwingungen langer aliphatischer Ketten. Sie gehen von den einfachsten Polynomen dieser Art aus und stellen Beziehungen zwischen ihnen auf. Darauf betrachten sie Ausdrücke für diese Polynome mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen. Sie betrachten eine erzeugende Funktion der Polynome und stellen Beziehungen zwischen den Polynomen und der erzeugenden Funktion auf. Hierauf betrachten sie Kettenbruchentwicklungen für die Polynome, sowie Determinantenausdrücke für dieselben. Es ergeben sich für die erzeugende Funktion Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion. Verff. betrachten Reihenentwicklungen nach den Umkehrungen der genannten Polynome. Ähnliche Betrachtungen führen Verff. für die Polynome von Hermite und Legendre durch. Hierauf gehen sie auf die Reihenentwicklungen der Polynome ein. Der zweite Teil des Buches befaßt sich mit den Anwendungen der genannten Polynome auf die Lösung des elektrostatischen Problems einer unendlichen leitenden Ebene und einer leitenden Kugel. Im dritten Teil des Buches werden die Polynome angewandt auf das Problem zweier leitender Kugeln.

Max Strutt.

Döhler, O. und G. Lüders: *Über einige unendliche Reihen von Besselschen Funktionen*. Z. angew. Math. Mech. 30, 382 (1950).

Einige unendliche Reihen, deren Glieder Produkte aus Besselschen Funktionen $J_n(z)$ und $I_n(z)$ sind, werden durch den Vergleich mit den Potenzreihen der erzeugenden Funktionen der Besselschen Funktionen summiert. Erwin Kreyßig.

Mersman, W. A.: A new form of solution of Hermite's equation. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 191—197 (1950).

$y(z)$ sei eine Lösung von $u'' + a(z)u' + b(z)u = 0$. In Verallgemeinerung einer für die Besselsche und Legendresche Differentialgleichung bekannten Methode liefert der Ansatz $u = yv + w$ eine weitere Lösung, die analytisch und numerisch einfacher auszuwerten ist als die mit dem üblichen Ansatz $u = yv$ gewinnbare, besonders, wenn a, b und y Polynome sind. Z. B. ergibt sich für $u'' + 2zu' - 4nu = 0$

($n = 0, 1, 2, \dots$) als zweite Lösung $H_{2n}(iz) \int_0^z e^{-t^2} dt + K_{2n}(z) e^{-t^2}$; hierbei sind $H_n(z)$ die Hermiteschen Polynome und $K_n(z)$ ebenfalls Polynome. *E. Kreyßig.*

Giaccardi, Fernando: Di una formula integrale dei polinomi di Hermite. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 270—273 (1950).

Ausgehend von der Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{2^n} \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{H_{n-2\nu}(x)}{\nu! (n-2\nu)!} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$$

mit $A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} H_k(x) f(x)}{2^k \cdot k! \sqrt{\pi}} dx$ wird zunächst rein formal die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f(x) dx = \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{s! 2^{2s}}$$

gewonnen und hernach unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ analytisch ist, bewiesen.

Otto Volk.

Truesdell, C.: On the addition and multiplication theorems for special functions, Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 752—755 (1950).

Ist $F(z, \alpha)$ eine analytische Funktion von z , die die Funktionalgleichung $\partial F(z, \alpha) / \partial z = F(z, \alpha + 1)$ erfüllt, so gilt die Taylorentwicklung

$$(1) \quad F(y, \alpha) = F(z + (y - z), \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - z)^n}{n!} F(z, \alpha + n).$$

Für $y = kz$ folgt hieraus das Multiplikationstheorem:

$$(2) \quad F(kz, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-1)^n}{n!} z^n F(z, \alpha + n).$$

Setzt man

$$F(z, \alpha) = e^{i\alpha\pi} z^{-\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{z}), \quad = \Gamma(\alpha + 1) (-z)^{-\alpha-1-b} e^{-1/z} L_{\alpha}^{(b)}(z^{-1}), \\ = e^{i\alpha\pi} e^{-z} L_{\alpha}^{(b)}(z), \quad = e^{i\alpha\pi} \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} F(\alpha, c; b; z^{-1}), \quad = e^{i\alpha\pi} \Gamma(\alpha) \xi(\alpha, z),$$

so ergeben sich unmittelbar bekannte Multiplikationstheoreme für die Besselschen, die Laguerreschen Funktionen und die verallgemeinerte Euler-Riemannsche ξ -Funktion, die Geltung haben, solange (1) gültig ist. Da man links in (2) k und z vertauschen kann, so gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-1)^n}{n!} z^n F(z, \alpha + n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} k^n F(k, \alpha + n);$$

setzt man endlich $k = 0$, so folgt:

$$F(0, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n F(z, \alpha + n).$$

Otto Volk.

Tricomi, Francesco G.: Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 263—289 (1949).

Verf. gibt eine zusammenfassende und ergänzende Darstellung der Ergebnisse eigener und anderer (vgl. z. B. H. Szegő, Orthogonal polynomials. Amer. math. Soc. Colloq. Publ. no. 28, New York 1939; dies. Zbl. 23, 215) Arbeiten über das asymptotische Verhalten der Laguerreschen Polynome

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-x)^m}{m!} = \binom{n+\alpha}{n} F(n, \alpha + 1; x)$$

für große Werte von n , wenn x nicht negativ ist. Es sei $\nu = 4n + 2\alpha + 2 = 4n_1$ dann wird:

$$(1) \quad e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{n_1}{x}\right)^{\alpha/2} \left(J_\alpha(2\sqrt{n_1 x} + O(n^{-2}))\right) \text{ für } x = O(n^{-1});$$

$$(2) \quad = \frac{(-1)^n (2 \cos \vartheta)^{-\alpha}}{\sqrt{\pi} n_1 \sin(2\vartheta)} \left(\sin \Theta - \frac{A_1^{(\alpha)}(\vartheta) \cos \Theta}{n_1 \sin(2\vartheta)} + O(n^{-2}) \right), \quad a\nu \leq x \leq b\nu,$$

$$\text{wo } 0 < a < b + 1, \quad A_1^{(\alpha)}(\vartheta) = \frac{1}{12} \left(\frac{5}{4 \sin^2 \vartheta} - (1 - 3\alpha^2) \sin^2 \vartheta - 1 \right),$$

$$\vartheta = \arccos \sqrt{\frac{x}{\nu}} \quad \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right), \quad \Theta = n_1 (2\vartheta - \sin(2\vartheta)) + \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \quad = \gamma_1 \left\{ A_1(t) + \left(\frac{4}{3\nu^2} \right)^{1/3} \left(\frac{t^2}{5} A_1'(t) + \frac{3+5\alpha}{10} \left(t - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\Gamma(\frac{2}{3})} A_1(t) \right) + O(n^{-5/3}) \right) \right\}$$

$$\text{wo } x = \nu - \left(\frac{4\nu}{3} \right)^{1/3} t, |t| < 1; \gamma_1 = \frac{(-1)^n}{\pi} 2^{-\alpha} \left(6^{1/3} \nu^{-1/3} + \frac{3+5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \nu^{-1} + O(n^{-5/3}) \right)$$

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{t}{3}} (J_{-1/3}[(2t/3)^{3/2}] + J_{1/3}[(2t/3)^{3/2}]);$$

$$(4) \quad = \frac{(-1)^n (2 \cos \vartheta)^{-\alpha} e^{-\Theta}}{2\sqrt{\pi} n_1 \sin(2\vartheta)} \left[1 - \frac{A_1^{(\alpha)}(\vartheta)}{n_1 \sin(2\vartheta)} + O(n^{-2}) \right], \quad x \geq c\nu > \nu$$

$$\text{wo } \cos \vartheta = \sqrt{\frac{x}{\nu}}, \quad A_1^{(\alpha)}(\vartheta) = \frac{1}{12} \left(\frac{5}{4 \sin^2 \vartheta} - (1 - 3\alpha^2) \sin^2 \vartheta + 1 \right),$$

$$\Theta = n_1 (\sin(2\vartheta) - 2\vartheta).$$

Zum Schluß wird die Formel (2) zur angenäherten Bestimmung der Nullstellen $\lambda_{n,k}^{(\alpha)}$ von $L_n^{(\alpha)}(x)$ für nicht zu kleine n (etwa $n \geq 10$) verwendet und die Darstellung abgeleitet:

$$\lambda_{n,k}^{(\alpha)} = x_k^{(0)} + \frac{1-3\alpha^2}{3\nu} + \frac{1}{3(\nu-x_k^{(0)})} - \frac{5}{n(\nu-x_k^{(0)})^2} + O(n^{-2}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wo $x_k^{(0)} = 4n_1 \cos^2 \vartheta_k^{(0)}$ und $\vartheta_k^{(0)}$ Wurzel der Gleichung $2\vartheta - \sin(2\vartheta) = (n-k + \frac{3}{4})\pi/n_1$ ist; eine numerische Tabelle für die Auflösung der letzten Gleichung ist angefügt.

Otto Volk.

Toscano, Letterio: Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. VIII. S. 8, 200—202 (1950).

Ausgehend von der Uspenskyschen Integraldarstellung

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-2)^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\sqrt{\pi} (2n)! \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^\pi H_{2n}(\sqrt{2x} \cos \varphi) \sin^{2\alpha} \varphi d\varphi \quad \left(\alpha > -\frac{1}{2} \right),$$

erhält Verf. die Beziehung

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} (\alpha + \frac{1}{2}, n)} \int_0^\infty e^{-z} \frac{(x+z)^n}{\sqrt{z}} V_{2n}^{(2\alpha+1)} \left(\sqrt{\frac{z}{x+z}} \right) dz \quad \left(\alpha > -\frac{1}{2} \right)$$

oder, $z = x \cot^2 \vartheta$ gesetzt:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2x^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} (\alpha + \frac{1}{2}, n)} \int_0^{\pi/2} e^{-x \cot^2 \vartheta} \frac{V_{2n}^{(2\alpha+1)}(\cos \vartheta)}{\sin^{2n+2} \vartheta} d\vartheta,$$

wo $V_n^{(s)}(x)$ die ultrasphärischen Polynome $(-1)^n \frac{(s,n)}{n!} P\left(-n, s+n; \frac{s+1}{2}; \frac{x+1}{2}\right)$ bedeuten.

Otto Volk.

Toscano, Letterio: Funzione generatrice dei prodotti di polinomi di Laguerre con gli ultrasferici. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 144—149 (1950).

Beweis der Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n!}{(2\alpha+1, n)} L_n^{(2\alpha)}(x) V_n^{(2\alpha+1)}(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{z^2-2yz+1}} \left(\frac{2}{xz\sqrt{1-y^2}} \right)^{\alpha} e^{xz(z-y)/(z^2-2yz+1)},$$

aus der sich durch Spezialisierung die bekannten erzeugenden Funktionen für die Laguerreschen Polynome und für die ultrasphärischen Polynome ergeben. Die Grundlage des Beweises bildet die von Van der Pol und K. P. Niessen gegebene Integraldarstellung

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} J_{\alpha}(2u\sqrt{t}) J_{2\alpha}(2\sqrt{u}x) du = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+4t}} e^{-\lambda x/(\lambda^2+4t)} J_{\alpha}\left(\frac{2x\sqrt{t}}{\lambda^2+4t}\right),$$

die sich auch für die Ableitung einer erzeugenden Funktion für die Produkte von Laguerreschen und Jacobischen Polynomen verwenden läßt. *Otto Volk.*

Palamà, Giuseppe: Funzioni di Laguerre di 2^a specie. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 72—77 (1950).

In this paper the author starts with the classical equations of Laguerre and Hermite, viz., (1) $xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$, and (2) $y'' - 2xy' + 2ny = 0$,

and considers two special solutions — one of each — symbolised respectively as $l_n^{(\alpha)}(x)$ and $h_n(x)$, and designated as the Laguerre and Hermite functions of the second kind; the corresponding functions of the first kind are of course the well-known polynomials $L_n^{(\alpha)}(x)$ and $H_n(x)$. By obtaining the general solution of (1) in two distinct ways, the author expresses $L_n^{(\alpha)}(x)$ and $l_n^{(\alpha)}(x)$ in terms of Kummer functions, and further verifies that $l_n^{(\alpha)}(x)$ satisfies the same recurrence formula as $L_n^{(\alpha)}(x)$. — Next remarking that (1) is but a particular phase of $xy'' + (v-x)y' - \beta y = 0$ and that this equation is carried over into (2) by changing the independent variable x into x^2 , and then putting $v = \frac{1}{2}$ and $\beta = -n/2$, the author employs a priori reasoning to establish a number of relations that subsist among the functions:

$$H_{2n}(x), G\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2); \quad h_{2n}(x), G\left(-n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right), l_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2);$$

$$H_{2n+1}(x), G\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right), L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2); \quad h_{2n+1}(x), G\left(-n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), l_n^{(\frac{1}{2})}(x^2).$$

— Finally the author derives two note-worthy formes for $l_n^{(\alpha)}(x)$, the first of which is the product of a certain elementary function and the n^{th} differential coefficient of another elementary function and the second is a definite integral, extending over a unit interval. — There are three minor misprints; thus

$$\text{on p. 72, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\beta, \frac{1}{2}, v, \varepsilon x\right) \quad \text{should be } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\beta, \frac{1}{\varepsilon}, v, \varepsilon x\right);$$

$$\text{on p. 73, } -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} x^{-\alpha} \cdot G(-\alpha-n, 1-\alpha, \alpha) \quad \text{should be } -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\alpha} G(-\alpha-n, 1-\alpha, x);$$

$$\text{and on p. 75, } G\left(-n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right) \quad \text{should be } G\left(-n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x}{2}\right).$$

— Although there are casual references to certain known results, (e. g., those of Szegö), the paper contains on the whole a decent number of interesting results, which are wholly novel. One may naturally look for further applications of the function $l_n^{(\alpha)}(x)$ in the years to come.

Haridas Bagchi.

Steffensen, J. F.: On a special type of polynomials. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festskr. t. J. Nielsen, 6—9 (1950).

Ein in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 26, 208) eingeführter Operator \mathcal{O} wird zu Δ spezialisiert und zur Definition spezieller Polynome

$$g_\nu(x, y) = \sum_{s=0}^{\nu} (-1)^s x^s \Delta^s y^\nu \quad \text{und} \quad g_\nu(x) = g_\nu(x, 0)$$

benutzt. Die g_ν haben eine erzeugende Funktion

$$\frac{e^{y^t}}{1+x(e^t-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} g_\nu(x, y)$$

und treten auf bei der Differentiation

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} \left(\frac{e^{ct}}{e^t + a} \right) = \frac{e^{ct}}{e^t + a} g_v \left(\frac{e^t}{e^t + a}, c \right).$$

Sie genügen einfachen Rekursionsformeln und der Funktionalgleichung

$$\frac{g_v(x, y) - y^v}{x} = (-1)^{v+1} \frac{g_v(1-x, -y) - (-y)^v}{1-x}.$$

Die Eulerschen und Bernoullischen Polynome lassen sich durch die g_v ausdrücken:

$$g_v\left(\frac{1}{2}, y\right) = E_v(y); \quad \int_0^1 g_v(x, y) dx = B_v(y).$$

Lothar Collatz.

Meixner, Josef: Reihenentwicklungen von Produkten zweier Sphäroidfunktionen nach Produkten von Zylinder- und Kugelfunktionen. Math. Nachr., Berlin 3, 193—207 (1950).

Seien x, y, z kartesische Koordinaten, r, ϑ, φ Kugelkoordinaten, ξ, η, φ Koordinaten des verlängerten Rotationsellipsoids, zwischen denen der Zusammenhang $x \pm i y = r \sin \vartheta e^{\pm i \varphi} = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} e^{\pm i \varphi}$, $z = r \cos \vartheta + c \alpha = c \xi \eta$ mit konstanten c, α bestehe. In jedem der drei Koordinatensysteme ist die Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ separierbar. Man wird nun erwarten, daß sich eine im rotationselliptischen System separierte Lösung nach Lösungen entwickeln läßt, die in den Kugelkoordinaten separiert sind. In dieser Richtung zeigt Verf.: Sei gesetzt $\gamma = k c$, $k r = \gamma v$, $\cos \vartheta = w$ bzw. $v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \xi \eta - 1}$, $w = \frac{\xi \eta - \alpha}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \xi \eta - 1}}$, sei ferner 2ν keine ungerade Zahl; dann sind die Reihen

$$(1) \quad \Psi P_v^{\mu(j)}(\xi, \eta; \gamma, \alpha) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} b_{v,t}^{\mu}(\gamma, \alpha) \psi_{v+t}^{(j)}(\gamma v) \mathfrak{P}_{v+t}^{\mu}(w),$$

$$(2) \quad \Psi Q_v^{\mu(j)}(\xi, \eta; \gamma, \alpha) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} b_{v,t}^{\mu}(\gamma, \alpha) \psi_{v+t}^{(j)}(\gamma v) \mathfrak{Q}_{v+t}^{\mu}(w),$$

als Funktionen von ξ oder η betrachtet, formale Lösungen der Sphäroiddifferentialgleichung (3) $((1 - z^2) y'(z))' + \left(\lambda + \gamma^2(1 - z^2) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right) y(z) = 0$, falls die Koeffizienten $b_{v,t}^{\mu}(\gamma, \alpha)$ einem im allgemeinen fünfgliedrigen Rekursionssystem genügen. Ist insbesondere $\lambda = \lambda_v^{\mu}(\gamma)$ der zum charakteristischen Exponenten ν bei $z = \infty$ gehörende Eigenwert von (3), so gibt es eine ausgezeichnete Lösung des Rekursionssystems, mit der die Reihen (1), (2) in jedem abgeschlossenen Bereiche, dessen Punkte die vier Ungleichungen $|\xi \eta - \alpha \pm \sqrt{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)}| > |\alpha \pm 1|$ erfüllen, gleichmäßig konvergieren und dort wirkliche Lösungen von (3) mit $z = \xi$ bzw. $z = \eta$ darstellen. Enthält der Bereich beliebig große ξ , so gilt bei geeigneter Normierung der ausgezeichneten Lösung des Rekursionssystems

$\Psi P_v^{\mu(j)}(\xi, \eta; \gamma, \alpha) = S_v^{\mu(j)}(\xi; \gamma) P s_v^{\mu}(\eta; \gamma)$, $\Psi Q_v^{\mu(j)}(\xi, \eta; \gamma, \alpha) = S_v^{\mu(j)}(\xi; \gamma) Q s_v^{\mu}(\eta; \gamma)$. α, γ, ν, μ sind abgesehen von der Forderung, daß 2ν keine ungerade Zahl und für (2) $\nu + \mu$ nicht ganz ist, beliebige komplexe Zahlen, ξ, η sind komplexe Veränderliche. Es werden explizite Formeln hergeleitet, die die ausgezeichnete Lösung des fünfgliedrigen Rekursionssystems aus den Koeffizienten der Entwicklung

$$P s_v^{\mu}(z; \gamma) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r a_{v,2r}^{\mu}(\gamma) \mathfrak{P}_{v+2r}^{\mu}(z)$$

der Sphäroidfunktionen nach Kugelfunktionen aufzubauen gestatten. Besondere Werte der Indizes und der Argumente werden eingehend diskutiert. Es zeigt sich, daß man auf diese Weise die meisten bekannten Entwicklungen der Sphäroidfunktionen nach Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen als Spezialfälle gewinnt.

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Funktionentheorie:

Finzi, Arrigo: Sulle trasformazioni conformi del piano e su due possibili estensioni del teorema di Cauchy. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 4, 191—203 (1950).

$x' = x'(x, y)$, $y' = y'(x, y)$: transformation du plan définie sur un ensemble ouvert D , $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z' = z'(z)$. Les fonctions x' et y' admettent des dérivées premières (finies) en tout point et selon toute direction. Proposition 1: Si z' conserve les angles des vecteurs infinitésimaux v issus d'un point, sauf sur un ensemble de mesure nulle le rapport des longueurs de v et du transformé de v est indépendant de la direction de v . Proposition 2: Si inversement le rapport des longueurs d'un vecteur infinitésimal v issu d'un point et de son transformé est indépendant de la direction de v , sauf sur un ensemble de mesure nulle z' conserve l'angle des vecteurs infinitésimaux. Théorème: Si les dérivées des fonctions x' et y' sont bornées sur D et si z' possède l'une des propriétés intervenant dans les énoncés des Propositions 1 et 2, z' est une fonction analytique de z . Les démonstrations des Propositions font intervenir l'uniformisation d'une configuration contractante par élimination d'ensembles de mesure nulle. Le Théorème est établi en montrant que l'intégrale $\int f(z) \cdot dz$ le long de toute courbe simple fermée de Jordan rectifiable est $= 0$. [Remarques du référent: Toute transformation du plan z' localement lipschitzienne définie sur un ensemble ouvert admet en tout point P de D une dérivée suivant chaque direction et est presque partout différentiable. La transformation tangente en un point P de différentiabilité, étant une transformation linéaire, est une similitude (ce qui équivaut à l'existence de la dérivée complexe) si elle conserve soit les angles soit le rapport des longueurs. Si donc nous supposons simplement que z' est localement lipschitzienne et qu'aux points où existe la transformation tangente, celle-ci conserve soit les angles soit les rapports des longueurs, l'analyticité résulte d'un théorème de Besicovitch (voir Saks, Theory of the integral, Warszawa-Lwow, 1937, p. 197; ce. Zbl. 17, 300).]

Christian Panc.

Plancherel, M.: Intégrales de Fourier et fonctions entières. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22.6.1947), 31—43 (1949).

Bericht über die vom Verf. und G. Pólya in Comment. math. Helvetici 9, 224—248 und 10, 110—163 (1937) (dies. Zbl. 16, 360, 18, 152) publizierten Untersuchungen über ganze Funktionen vom Exponentialtypus, die gleichzeitig der Klasse L^p angehören.

Walter Saxer.

Ilieff, Ljubomir: Über die Verteilung der Nullstellen einer Klasse ganzer Funktionen. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I 44, 143—164 und deutsche Zusammenfassg. 165—173 (1948) [Bulgarisch].

L'A. étudie les zéros des fonctions entières de la forme $\int_0^1 f(t) \cos zt dt$. Partant des résultats classiques de Pólya, prouvant que la fonction n'a que des zéros réels lorsque $f(t)$ est positive et croissante, l'A. en déduit d'autres cas où la même conclusion est valable; par exemple, si, en posant $x = 1 - t^{2q}$ (q entier > 0), $\varphi_0(x) = f_0(t)$,

$f_1(t) = \varphi_1(x) = \int_0^x \varphi_0(u) du$, on sait que la fonction entière $\int_0^1 f_0(t) \cos zt dt$ n'a

que des zéros réels, il en est de même de la fonction entière $\int_0^1 f_1(t) \cos zt dt$. Il obtient des résultats analogues lorsque $\cos zt$ est remplacé par $p(z+t) + p(z-t)$, où p est un polynôme.

Jean Dieudonné.

Nejmark, Ju. I.: D-Zerlegung des Raumes der Quasipolynome. (Zur Stabilität der linearisierten gesteuerten Systeme). Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 349—380 (1949) [Russisch].

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Nullstellen der Quasipolynome, das sind Funktionen der Form

$$Q = \sum_{k=0, s=0}^{n, m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z}, \quad \tau_m > \tau_{m-1} > \dots > \tau_1 > \tau_0 = 0;$$

v_1, \dots, v_p seien Elemente in minimaler Anzahl mit $\tau_s = \sum \alpha_{sj} v_j$, α_{sj} ganz. Der Raum der Quasipolynome, d. h. der Raum der Parameter a_{ks}, τ_s wird mit $R_{2n, m}$ bezeichnet. Sei $D(s)$ der Teilbereich von $R_{2n, m}$, dessen entsprechende Q genau s Wurzeln in $\operatorname{Re} z > 0$ haben. Dann heißt $R_{2n, m} = D(0) + D(1) + \dots + D(\infty)$ die D -Zerlegung von $R_{2n, m}$. Die Abhängigkeit von Q von einem Parameter a heißt grob in a_0 , wenn es eine ganze Umgebung von a_0 gibt, deren Punkte V alle gleichen $D(s)$ gehören. Es wird folgendes gezeigt: Für $a_{nm} \neq 0$ hängen die Nullstellen von Q gleichgradig von den a_{ks} ab. $a_{nm} \neq 0$ ist notwendig dafür, daß $Q \in E = \sum_{s < \infty} D(s)$,

(wie schon Pontrjagin für $p = 1$ gezeigt hat). Notwendig dafür ist weiter, daß $V = \sum_{s=0}^m a_{ns} e^{\tau_s z}$

alle Nullstellen in $\operatorname{Re} z \leq 0$ hat. Hinreichend dafür ist $a_{nm} \neq 0$ und $\operatorname{Re} z < -\delta$, $\delta > 0$, für alle Nullstellen von V . Bei $p = 1$ ist notwendig und hinreichend für $Q \in E$, daß $a_{nm} \neq 0$ und daß die Nullstellen von $\sum a_{ks} (i\omega)^k t^s$ für genügend großes ω in $|t| \leq 1$ liegen. Die Frage, wann V alle Wurzeln in $\operatorname{Re} z \leq 0$ hat, kann durch Benützung des Kroneckerschen Approximationssatzes zurückgeführt werden auf dieselbe Frage für ein Polynom, dessen Koeffizienten von p reellen Parametern abhängen. Q ist grob in bezug auf a_{ks}, τ_s dann und nur dann, wenn $|a_{nm}| - |a_{n, m-1}| - \dots - |a_{n, 0}| > 0$. Sei $N \subset R_{2n, m}$ die Menge aller Punkte, für die Q rein imaginäre Nullstellen $i\omega$ hat, N_ω die Menge aller Punkte, für die in jeder Umgebung Punkte aus N mit beliebig großem ω liegen. Dann ist N gegeben durch die $m+1$ Ungleichungen

$$|a_{ni}| \leq |a_{n, m}| + \dots + |a_{n, i+1}| + |a_{n, i-1}| + \dots + |a_{n, 0}|, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Genauer werden noch untersucht die Durchschnitte der Mengen D, N, N_ω mit Teilmengen des $R_{2n, m}$ insbesondere mit der „ w -Ebene“ der Quasipolynome $f + wg$ (f, g feste Quasipolynome, w beliebig komplex): Mit w_∞ seien alle Grenzwerte bezeichnet, denen sich $w = f(z)/g(z)$ nähern kann, wenn z auf einem Weg gegen ∞ strebt, der ganz in der rechten Halbebene liegt. Sei s_r das Bild von $|z| > r$, $\operatorname{Re} z > 0$ bei der Abbildung $w = f(z)/g(z)$, s_r' die abgeschlossene Hülle von s_r und schließlich $T_\infty = \lim s_r'$. Dann gelten folgende Tatsachen: 1. N_ω ist abgeschlossen, nichtleer, besteht aus höchstens zwei Komponenten und zerlegt die w -Ebene in Bereiche π_0, π_1, \dots , die alle einfach zusammenhängend sind, mit Ausnahme höchstens eines einzigen zweifach zusammenhängenden. 2. Wenn $E = \sum_{s < \infty} D(s)$ aus mehr als 2 Punkten besteht, so existiert

höchstens ein Punkt w_∞ . 3. T_∞ ist abgeschlossen, zusammenhängend und es ist $T_\infty = D(\infty) + N_\omega + \sum w_\infty$. 4. Wenn π_k mehr als 2 Punkte aus E enthält, dann $\pi_k \subset E$ und $\pi_k \cap \sum w_\infty = 0$. Wenn f, g dieselben τ_s haben, wird N_ω, w_∞ noch genauer angegeben (Es hängt dann noch von p ab, wie N beschaffen ist). 1., 2., 3., 4. gelten für beliebige ganze Funktionen. Bei 2. wird ein Satz von Lindelöf über Zielwerte meromorpher Funktionen verwendet (der übrigens vom Verf. Iversen zugeschrieben wird). Die D -Zerlegung der $\pi_k \subset E$ wird in Abhängigkeit von N noch genauer studiert und an speziellen Beispielen erläutert. Zum Schluß werden noch gewisse Ausdehnungen der Determinantenkriterien von Hurwitz, Hermite und Routh betrachtet (s. a. Verf., dies. Zbl. 30, 103) und weitere Sätze hergeleitet, die es ermöglichen, von einem konkret vorgelegten Quasipolynom zu entscheiden, welchem $D(s)$ es angehört. — Ein Großteil der zitierten Arbeiten war Ref. nicht zugänglich. — Außer zahlreichen verdruckten Indices noch folgende Druckfehler: S. 355, Zeile 13 von oben fehlt rechts der Summand $i \arg t_j^\infty$, S. 357

unten lauten die Substitutionen richtig $i x_j = \frac{\xi_j + 1}{\xi_j - 1}, \quad x = \frac{t + 1}{t - 1}.$ Karl Prachar.

Nejmark, Ju. I.: Die Struktur der D -Zerlegung des Raumes der Quasipolynome und die Diagramme von Vyšnegradskij und Nyquist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1503—1506 (1948) [Russisch].

Kurze Zusammenstellung einiger Ergebnisse (s. vorsteh. Referat) und deren Anwendung auf die im Titel genannten Diagramme, die bei Stabilitätsuntersuchungen verwendet werden.

Karl Prachar.

Eggleston, H. G.: Note on the Taylor coefficients of a function with algebraic-logarithmic singularities on its circle of convergence. J. London math. Soc. 24, 171—181 (1949).

Die analytische Funktion $f(z)$ besitzt an der Stelle $z = c$ eine algebraisch-logarithmische Singularität, wenn sie sich in einer Umgebung von c als Summe endlich vieler Terme der Form $(1) (z - c)^{-s} \{\log(z - c)\}^k \Phi(z)$ darstellen läßt, wo

$s = \sigma + \alpha i$ beliebig komplex, $k \geq 0$ ganz und $\Phi(z)$ in c regulär und $\neq 0$ sein soll. Ein Term der Form (1) heißt ein zu c gehöriges singuläres Element von $f(z)$ vom Typus (s, k) . Man legt ihm das Gewicht $[\sigma, k]$ für $s \neq 0, -1, -2, \dots$ bzw. $[s, k-1]$ für $s = 0, -1, -2, \dots, k > 0$ bzw. $[-\infty, 0]$ für $s = 0, -1, -2, \dots, k = 0$ bei und nennt $[\sigma, k]$ größer als $[\sigma', k']$, wenn $\sigma > \sigma'$ oder $\sigma = \sigma', k > k'$ ist. — R. Jungen [Comment. math. Helvetici 3, 266–306 (1931); dies. Zbl. 3, 319] hat

für Funktionselemente $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, die am Rande ihres Konvergenzkreises nur endlich viele Singularitäten c_1, c_2, \dots, c_t besitzen, die sämtlich algebraisch-logarithmisch sind, wobei das maximale Gewicht $[\sigma, k]$ der zu c_1 gehörigen singulären Elemente größer ist als die Gewichte der zu c_2, \dots, c_t gehörigen singulären Elemente, eine Koeffizientenabschätzung angegeben. Sie fußt darauf, daß unter den genannten Voraussetzungen die Koeffizienten a_n eine Darstellung der Form

$$(2) \quad a_n = \frac{n^{\sigma-1} (\log n)^k}{c_1^n} \left\{ A_1 e^{i\alpha_1 \log n} + \dots + A_p e^{i\alpha_p \log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right\}$$

zulassen, wo p die Anzahl der zu c_1 gehörigen singulären Elemente vom Gewicht $[\sigma, k]$ angibt und die A_ν Konstanten bedeuten. Wie Verf. in vorliegender Arbeit zeigt, läßt sich der Darstellung (2) auch eine Abschätzung von $\Re(a_n)$ und $\Im(a_n)$ entnehmen: Wird $c_1 = r e^{2\pi\alpha i}$, $A_\nu = R_\nu e^{\theta_\nu i}$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) gesetzt, so ist

$$\left. \begin{aligned} \Re(a_n) \\ \Im(a_n) \end{aligned} \right\} = \frac{n^{\sigma-1} (\log n)^k}{r^n} \left[\sum_{\nu=1}^p R_\nu \cos(\theta_\nu + \alpha_\nu \log n - 2\pi\chi n) + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right].$$

Sind dabei alle $R_\nu > 0$ und ist mindestens eine der untereinander verschiedenen Größen $\alpha_\nu \neq 0$, so gelten für jede monoton abnehmende Nullfolge (ε_n) die Abschätzungen

$$(3) \quad \left| \sum_{\nu=1}^p R_\nu \cos(\theta_\nu + \alpha_\nu \log n - 2\pi\chi n) \right| > \varepsilon_n$$

für alle n bis auf gewisse Ausnahmewerte, die eine Folge n_1, n_2, \dots von der Dichte 0 bilden. Auf Verallgemeinerungen dieses Satzes wird hingewiesen; vgl. dazu das nachfolgende Referat.

Friedrich Lösch.

Eggleston, H. G. and R. Wilson: The coefficient theory of a transcendental singularity of algebraic-logarithmic type. J. London math. Soc. 24, 291–304 (1950).

Verff. zeigen, daß sich die im vorstehenden Referat [dessen Bezeichnungen beibehalten werden] genannten Resultate von R. Jungen auf Funktionselemente

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ übertragen, die am Rande ihres Konvergenzkreises nur gewisse transzendente Singularitäten von algebraisch-logarithmischem Typus aufweisen. Eine Singularität dieser Art liegt an der Stelle $z = c$ vor, wenn sich die Funktion in ihrer Umgebung als Summe von unendlich vielen algebraisch-logarithmischen Elementen $A(z-c)^{-s} [\log 1/(z-c)]^k$ mit komplexem $s = \sigma + \alpha i$ und ganzem $k \geq 0$ darstellen läßt. — Betrachtet wird besonders der Fall, daß $f(z)$ am Rande des Konvergenzkreises nur eine einzige Singularität besitzt, zu der (im allgemeinen unendlich viele) singuläre Elemente von maximalem Gewicht $[\sigma, k]$ gehören. Es sei $z = 1$ diese Singularität und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (1-z)^{-s_\nu} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k$$

$$= (1-z)^{-\sigma} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (1-z)^{-i\alpha_\nu}$$

die Summe der Elemente vom Gewicht $[\sigma, k]$. Wird dann noch die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|$ vorausgesetzt, so ergibt sich für die Koeffizienten von (1) die asymptotische Abschätzung

$$(2) \quad a_n = n^{\sigma-1} (\log n)^k \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\Gamma(s_\nu)} e^{i\alpha_\nu \log n} + \eta_n \right\} \text{ mit } \eta_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Unter der weiteren Voraussetzung, daß unter den Größen $|\alpha_\nu|$ eine maximale auftritt, erhält man hieraus wie in dem von Jungen behandelten Fall algebraisch-logarithmischer Singularitäten die Koeffizientenabschätzung $|a_n| > \varepsilon_n n^{\sigma-1} (\log n)^k$, in der (ε_n) eine beliebige Nullfolge bedeutet, sowie die Limesrelation $a_n/a_{n+1} \rightarrow 1$, beide Male für alle n bis auf eine Folge n_1, n_2, \dots von Ausnahmewerten mit der Dichte 0. — Treten am Rande des Konvergenzkreises von $f(z)$ endlich viele Singularitäten auf, zu denen Elemente von maximalem Gewicht gehören, so lassen sich auch in diesem Fall die Resultate von Jungen über algebraisch-logarithmische Singularitäten übertragen. Ferner läßt sich in diesem Fall noch eine Aussage über die Lage der Singularitäten machen, die dem bekannten Hadamardschen Satz über Potenzreihen mit polaren Singularitäten entspricht. — Die Beweise stützen sich auf

eine Abschätzung der in (2) auftretenden Reihe (3) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\Gamma(s_\nu)} e^{i\alpha_\nu \log n}$, die der in der vorstehend referierten Arbeit für die analoge endliche Summe gewonnenen [im Referat mit (3) bezeichneten] Abschätzung entspricht: Setzt man $A_\nu/\Gamma(s_\nu) = R_\nu e^{i\theta_\nu}$, so erhält man unter den Voraussetzungen, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$ konvergiert und $\alpha_1 > 0$ sowie $\alpha_1 > |\alpha_\nu|$ für $\nu = 2, 3, \dots$ gilt, mit einer beliebigen Nullfolge (ε_n) für den Realteil von (3) die Abschätzung

$$(4) \quad \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu \cos(\theta_\nu + \alpha_\nu \log n) \right| > \varepsilon_n,$$

die für alle n bis auf eine Folge von Ausnahmewerten n_1, n_2, \dots von der Dichte 0 besteht.

Friedrich Lösch.

Eggleston, H. G.: Notes on Taylor coefficients (II): A further extension of Jungen's theorem. J. London math. Soc. 25, 58—61 (1950).

In der vorstehend referierten Arbeit [deren Bezeichnungen beibehalten werden] wurde die Koeffizientenabschätzung für ein Funktionselement $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegeben, das am Rande des Konvergenzkreises nur gewisse transzendente Singularitäten von algebraisch-logarithmischem Typus aufweist, wobei nur zu einer — in $z = 1$ angenommenen — Singularität Elemente von maximalem Gewicht $[\sigma, k]$ gehören. Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (1-z)^{-s_\nu} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k = (1-z)^{-\sigma} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (1-z)^{-i\alpha_\nu}$ die Summe dieser Elemente, so wurde dabei noch vorausgesetzt, daß unter den Imaginärteilen α_ν der Exponenten s_ν ein solcher von maximalem Betrag existiert. Verf. bemerkt jetzt, daß es statt dessen genügt, nur die Beschränktheit der Größen α_ν zu fordern. Auch in diesem Falle läßt sich nämlich die fundamentale [im Referat mit (4) bezeichnete] Abschätzung der vorangehenden Arbeit im wesentlichen aufrechterhalten. Genauer gilt: Es seien (R_ν) , (θ_ν) , (α_ν) reelle Zahlenfolgen, die den drei Voraussetzungen genügen: (1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} |R_\nu|$ konvergiert. (2) Mindestens eines der Produkte $\alpha_\nu R_\nu$ ist $\neq 0$. (3) Die Folge (α_ν) ist beschränkt, und es ist $\alpha_i^2 \neq \alpha_j^2$ für $i \neq j$. Dann besteht für eine beliebige Nullfolge (ε_n) die Abschätzung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu \cos(\theta_\nu + \alpha_\nu \log n) \right| > \varepsilon_n$$

für alle n bis auf gewisse Ausnahmewerte, die eine Folge n_1, n_2, \dots von der Dichte 0 bilden.

Friedrich Lösch.

Dvoretzki, Aryeh: Bounds for the coefficients of univalent functions. Proc. Amer. math. Soc. 1, 629—635 (1950).

Verf. gibt einige asymptotische Abschätzungen für die Koeffizienten einer Funktion $w = z + a_2 z^2 + \dots$, welche im Kreise $|z| < 1$ regulär und schlicht ist.

Sei W das Bildgebiet des Kreises $|z| < 1$ und $A(R)$ der Radius des größten Kreises, dessen Mittelpunkt in $|w| = R$ liegt und der in W enthalten ist. Verf. leitet für $|a_n|$ Abschätzungen ab, welche von $A(R)$ abhängen. Sei $A(R) = O(R^\gamma)$. Dann ist $a_n = O(n^{\gamma/(2-\gamma)})$, falls $0 < \gamma \leq 1$, $a_n = O(\log n)$, falls $\gamma = 0$, $a_n = O(1)$, wenn $-2 \leq \gamma < 0$, $a_n = O(n^{-1/2 + 2/(2-\gamma)})$ im Falle $\gamma < -2$. $\gamma = 1$ gibt die bekannte Relation $a_n = O(n)$ für schlichte Funktionen an, und $\gamma = -\infty$, in welchem Fall $w(z)$ beschränkt ist, gibt $a_n = o(n^{-1/2})$.
Koarlo Veikko Paatero.

Sakai, Eiichi: On the multivalency of analytic functions. J. math. Soc. Japan 2, 105—113 (1950).

Soit un domaine connexe D du plan des w ; $g(w)$ étant une branche d'une fonction effectuant la représentation conforme de D sur le cercle unité, $\Omega(\alpha, D) \equiv \frac{1 - |g(\alpha)|^2}{|g'(\alpha)|}$ ($\alpha \in D$) ne dépend que de α et de D . — Soit, dans $|z| < 1$, une fonction $w = q(z)$ holomorphe, non nulle en $z = 0$, dont les valeurs appartiennent à un domaine D ; alors $f(z) \equiv z^n q(z)$ est n -valente et étoilée pour $|z| < \varrho \leq 1$ si

$$\frac{|z|}{1 - |z|^2} \frac{\Omega[\varphi(z), D]}{|\varphi(z)|} < n \text{ pour } |z| < \varrho.$$

L'Â. applique ce théorème à des domaines D particuliers: $|w| < M$, $\Re w > 0$, $0 < |w| < M$, $m < |w| < M$. En utilisant le lemme de Schwarz il retrouve, entre autres, un résultat de Loomis [Bull. Amer. math. Soc. 46, n° 6 (1940)].

Jacques Dufresnoy.

Stoilow, Simon: Quelques remarques sur les éléments frontière des surfaces de Riemann et sur les fonctions correspondant à ces surfaces. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1326—1328 (1948).

Es wird eine über der z -Ebene liegende Riemannsche Fläche betrachtet. Ihre Randelemente lassen sich (Stoilow, Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris 1938; dies. Zbl. 17, 378) durch Umgebungsfolgen definieren. Dabei kann es vorkommen, daß für ein Randelement jede zu verwendende Umgebung, auf die z -Ebene projiziert, diese dicht bedeckt (z. B. bei der Logarithmusfläche). Aus dem Fehlen solcher total ausgebreiteter Randelemente können wichtige Schlüsse gezogen werden, z. B.: Wenn sie auf den beiden Riemannschen Flächen von $w(z)$ und der Umkehrfunktion $z(w)$ fehlen, so ist $w(z)$ eine algebraische Funktion. Oder: Jede Riemannsche Fläche einer Automorphiefunktion einer meromorphen Funktion hat notwendigerweise ein total ausgebreitetes Randelement, wenn sie nicht geschlossen ist. Dabei ist eine Automorphiefunktion $w(z)$ zu $f(z)$ durch $f(w) = f(z)$, $w \neq z$ definiert.

Walter Brödel.

Garabedian, P. R.: A remark on the moduli of Riemann surfaces of genus 2. Proc. Amer. math. Soc. 1, 668—673 (1950).

Verf. betrachtet eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht 2, die durch die Kurven $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ kanonisch geschnitten wird. Es werden zwei linear unabhängige Normalintegrale erster Gattung mit Perioden $\pi i, 0$ bzw. $0, \pi i$ in bezug auf α_1 und α_2 eingeführt. Die zu β_1, β_2 gehörigen Perioden $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ zeigen sich nun als Moduln der Riemannschen Fläche in dem Sinne, daß zwei Flächen der betrachteten Art aufeinander konform abgebildet werden können, sobald die Systeme $a_{\mu\nu}$ für beide Flächen übereinstimmen. Der Beweis stützt sich auf den Satz von Riemann über das Verschwinden der Riemannschen Thetafunktion. Als eine Anwendung zeigt Verf., daß als Moduln eines dreifach zusammenhängenden Gebietes Zuwächse der konjugierten Funktionen gewisser zum Gebiet gehörigen harmonischen Maße längs der Randkomponenten angesehen werden können.

Gunnar af Hållström.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Stöhr, Alfred: Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. III. Zweites Beispiel: Der Operator

$\nabla \Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_1 + 1, y_2) + \Phi(y_1 - 1, y_2) + \Phi(y_1, y_2 + 1) + \Phi(y_1, y_2 - 1) - 4\Phi(y_1, y_2)$.
Math. Nachr., Berlin **3**, 330—357 (1950).

Verfasser untersucht die Lösungen der partiellen Differenzengleichung (1) $\nabla \Phi(y_1, y_2) = 1$ für $y_1 = y_2 = 0$, $= 0$ sonst, wo $\nabla \Phi$ den Ausdruck $\nabla \Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_1 + 1, y_2) + \Phi(y_1 - 1, y_2) + \Phi(y_1, y_2 + 1) + \Phi(y_1, y_2 - 1) - 4\Phi(y_1, y_2)$ bedeutet. Es wird bewiesen, daß in der Menge der Lösungen ein solches $\tilde{\Phi}$ existiert, welches das folgende asymptotische Verhalten besitzt:

$$\tilde{\Phi}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \log r + \frac{3}{2\pi} \log z + \frac{1}{2\pi} c + O(r^{-2})$$

(für $r \rightarrow \infty$; $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$). Diese „ausgezeichnete Lösung“ wird mittels eines bestimmten Integrals explizit angegeben. Sie hat die folgende wichtige Eigenschaft: ist Φ eine Lösung der Gleichung (1), welche die folgende Bedingung erfüllt: $\Phi(y_1 + 1, y_2) - \Phi(y_1, y_2)$ und $\Phi(y_1, y_2 + 1) - \Phi(y_1, y_2)$ verschwinden im Unendlichen, so ist $\Phi(y_1, y_2) = \tilde{\Phi}(y_1, y_2) + c$ (c konstant). Auch die Umkehrung dieser Behauptung ist gültig. — Bemerkenswert sind auch folgende Sätze a) Ist Φ eine Lösung von (1) und $\Phi(y_1, y_2) = o(r)$, so folgt $\Phi(y_1, y_2) = \tilde{\Phi}(y_1, y_2) + c$. b) Ist Φ^* eine solche Lösung der homogenen Gleichung $\nabla \Phi^* = 0$, für welche $\Phi^*(y_1, y_2) = o(r)$ gültig ist, dann ist Φ^* eine Konstante. Eine Verallgemeinerung von b) ist der folgende Satz: Ist $\nabla \Phi = 0$ und $\Phi(y_1, y_2) = o(r^s)$ ($s \geq 0$ ganz), dann ist $\Phi(y_1, y_2)$ ein Polynom in y_1 und y_2 , dessen Gesamtgrad $s - 1$ ist. Als eine interessante Eigenschaft der „ausgezeichneten Lösung“ erwähnen wir die folgende Formel:

$$\tilde{\Phi}(y, y) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2y-1} \right) \quad (y > 0; \Phi(0, 0) = 0).$$

Dieses Resultat erleichtert die numerische Berechnung von Φ in den Gitterpunkten.

Stefan Fenyő.

Shah, S. M.: On real continuous solutions of algebraic difference equations. II. Proc. nat. Inst. Sci. India **16**, 11—17 (1950).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **33**, 119) wird das Verhalten gewisser Lösungen $y(x)$ der Differenzengleichung (1) $P[x, y(x), y(x+1)] = 0$ untersucht; $P(u, v, w)$ ist ein beliebiges reelles Polynom in den Variablen u, v und w . Falls $y(x)$ eine für $x > x_0$ reelle stetige Lösung von (1) ist und sich dazu eine positive Konstante B angeben läßt, so daß für alle $x > x_0$ und jedes h mit $0 \leq h \leq 1$ die Bedingung (2) $y(x+h) \geq y(x) \exp[-\exp(Bx)]$ erfüllt ist, so gibt es eine von P und B abhängende Konstante $A (> B)$, mit der (3) $y(x) < \exp[\exp(Ax)]$ für $x > x_1$ erfüllt wird. Für die Existenz einer Lösung von (1), welche der Bedingung (2) genügt, wird ein Beispiel angegeben. — Die weiteren Sätze beziehen sich auf Lösungen der Differenzengleichungen $P_0(x)y(x) + P_1(x)y(x+1) + \cdots + P_m(x)y(x+m) = P_{m+1}(x)[P_v(x) \text{ Polynome in } x] \text{ bzw. } P[x, y(x), y(x+1), \dots, y(x+m)] = 0$, wobei $P(u_1, u_2, \dots, u_{m+1})$ ein Polynom in den u_v ist. Auch bei diesen Sätzen werden aus Eigenschaften der Lösungen $y(x)$ Abschätzungen ähnlich (3) gewonnen; die vorausgesetzten Eigenschaften von $y(x)$ sind zum Teil von der Art der Bedingung (2). — Die Beweise gründen sich auf geschickte Abschätzungen.

Hans Töpfer.

Biernacki, Mieczysław: Sur l'équation $\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)y = 0$. Prace mat.-fiz., Warszawa **47**, 49—60 (1949).

Si abbia l'equazione alle differenze finite del secondo ordine (1) $\frac{\Delta^2 y}{h^2} + A(x)y = 0$,

$[A^2y = y(x + 2h) - 2y(x + h) + y(x)]$, $h > 0$, e sia $A(x)$ continua in (x_0, ∞) , $A(x) \geq m > 0$ ($m = \text{cost.}$). In queste ipotesi ogni soluzione continua della (1) è oscillante, possiede cioè infiniti zeri in (x_0, ∞) (Teorema di oscillazione). — Considerando insieme alla (1) l'equazione (2) $\frac{A^2z}{h^2} + a(x)z = 0$, se in un intervallo I , $A(x)$ ed $a(x)$ sono continue e $A(x) \geq a(x) > 0$, se $y(x)$ è una soluzione continua della (1) definita in un intervallo (α, β) contenuto in I tale che $y(\alpha) \geq 0$ e $y(x) > 0$ per $\alpha < x \leq \beta$, ed $n = [(\beta - \alpha)/h]$, se $z(x)$ è una soluzione della (2) tale che $z(\beta) = y(\beta)$, $z(\beta - h) = y(\beta - h)$, allora si ha anche $z(\beta - ih) \geq y(\beta - ih)$ ($i = 2, \dots, n$) (Teorema di confronto). Questo teorema sussiste cambiando α con β . — Più laboriosa riesce la dimostrazione del seguente teorema. Supposto che $y(x)$ sia una soluzione continua della (1) nulla in a ed in b , $|y(x)| > 0$ per $a < x < b$, e tale che in (a, b) si abbia $A(x) \geq m > 0$, allora se c è l'ascissa del punto di massimo di $|y(x)|$ in (a, b) valgono le limitazioni $b - c < \pi/2\sqrt{m + \frac{7}{2}h}$, $c - a < \pi/2\sqrt{m + \frac{7}{2}h}$.

Giovanni Sansone.

● Sansone, Giovanni: *Equazioni differenziali nel campo reale. I, II.* 2^a ed. (Coniglio Nazionale delle Ricerche. Monografie di matematica applicata.) Bologna: Zanichelli Editore. 1948, 1949. XVII, 400 p., XVI, 475 p.

Das Werk, dessen 1. Auflage 1941 nach einem knappen Jahre vergriffen war, ist zweifellos eine der hervorragendsten Darstellungen des Gebiets, die uns in die Hand gekommen sind. Es hat einen durchaus modernen Standpunkt und verzichtet dabei nicht darauf, auch klassische Einzelergebnisse in reicher Fülle auszubreiten. Die meisten der mannigfachen Richtungen, nach denen der Stoff ausgebaut worden ist, werden gleichmäßig berücksichtigt: Allgemeine Existenz- und Eindeigkeitssätze für Anfangs- und Randwertprobleme, analytische Gleichungen, insbesondere lineare mit analytischen Koeffizienten, Gleichungen mit periodischen Koeffizienten, asymptotisches Verhalten, Methoden der Laplace-Transformation und Operatorenrechnung, numerische und graphische Verfahren, schließlich eine Sammlung meist schwierigerer Beispiele aus den Anwendungsgebieten werden in flüssiger (mitunter auch referierender) Darstellung, mit regelmäßiger Formulierung von Sätzen und in geschickter, wechselreicher Anordnung vorgeführt, so daß man kaum mehr etwas von der „eigentümlich erschlaffenden Atmosphäre“ zu spüren bekommen wird, die nach einer treffenden Formulierung von Herrn Kamke „einige Teile der Theorie der Differentialgleichungen zu umgeben scheint“ (Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. V). Immerhin handelt es sich nicht um eine Einführung für den allerersten Anfang, schon wegen der Allgemeinheit des von vornherein eingenommenen Standpunktes, und auch deshalb, weil die elementaren Integrationsmethoden völlig ausgeschlossen sind. Unberücksichtigt ist ferner die Liesche Theorie, recht knapp sind die Andeutungen über das Verhalten der Integralkurven an singulären Stellen; doch ist hierfür ein recht vollständiges Schriftenverzeichnis vorhanden. Die Schriftennachweise sind im übrigen einzeln in Fußnoten oder in kleineren oder größeren Gruppen über den Text verteilt, gewiß bequem zu dessen unmittelbarer Ergänzung, zum Nachweis bestimmter Quellen aber wohl weniger vorteilhaft als die üblichen alphabetischen Verzeichnisse. Bei den Anwendungen sind Mechanik, Technik, Physik, Astronomie berücksichtigt, aber auffallenderweise nirgends Differentialgeometrie. — Wir geben nun eine Einzelübersicht mit Hervorhebung von Stellen, die uns methodisch oder inhaltlich originell erscheinen. — Band I. Kap. I. Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme in Normalform, Existenzsatz. Methode der schrittweisen Näherungen bei Lipschitzbedingung. Anwendung auf die elementare Einführung der trigonometrischen und auch der Jacobischen elliptischen Funktionen im Reellen. Abhängigkeit von Parametern und Anfangswerten. Cauchy-Lipschitzsche Polygonmethode bei bloßer Stetigkeit der rechten Seiten. Eine Methode von Tonelli. — Kap. II. Lineare Differentialgleichungssysteme in aufgelöster Form und Transformation linearer Differentialgleichungen. Fundamentalsystem. Variation der Konstanten. Matrizenkalkül, Matrizenpotenzreihen, Peanosche Reihe. Transformation zur Riccatischen Gleichung, mittels $y = t(x)u$, und mittels $x = x(\xi)$. Adjungierte und selbstadjungierte Gleichungen (ohne entsprechende Berücksichtigung der Systeme und zugehörigen Matrixmethoden). Übergang zu Volterra'schen Integralgleichungen. — Kap. III. Differentialgleichungen im analytischen Gebiet und spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. Majorantenmethode, Fuchs'sche Theorie für Differentialgleichungen 2. Ordnung. Hypergeometrische Gleichung, Jacobische, insbesondere Gegenbauersche Polynome. Konvergenz von Reihenentwicklungen nach solchen (im Komplexen), kein Darstellungssatz. Besselsche Funktionen, formale Bessel-Fourier-Entwicklung. — Kap. IV. Randwertaufgaben für Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sätze von La Vallée Poussin über Bestimmung von Integralkurven durch vorgegebene Punktsysteme. Sturmsche Sätze: Für den Vergleichs-

satz und Oszillationssatz Verwertung einer Identität von Picone. Eigenwertssatz auf Grund einer neueren Methode von Mammana, deren Vergleich mit der verwandten (älteren), hier aber nicht genannten Methode von Prüfer lehrreich wäre. Schließlich Spezialisierung zum Fall eines linear auftretenden Parameters und jetzt asymptotische Darstellung der Eigenwerte und Eigenfunktionen nebst Beweis der Äquivalenz mit gewöhnlichen Fourierreihen (Dini-Hobson). — Kap. V. Randwertprobleme für Differentialgleichungen höherer Ordnung. Adjungierte und selbstadjungierte Aufgaben (Bocher). Einführung der Greenschen Funktion, Übergang zu Integralgleichungen. Eigenwertaufgaben für den Fall eines im letzten Glied einer linearen homogenen Differentialgleichung linear auftretenden Parameters, Herstellung des Zusammenhangs mit der Variationsrechnung. Direkter Beweis des Existenzsatzes für semidefinite symmetrische Kerne nach Tonelli. — Kap. VI. Lineare Differentialgleichungen und Differentialsysteme mit periodischen Koeffizienten. Periodische und fastperiodische Lösungen. Floquetsche Theorie. Diskussion der Lösungsformen mittels Elementarteilertheorie der Fundamentalgleichung. Berechnung der charakteristischen Exponenten durch Entwicklung der Lösungen nach einem (künstlich eingeführten) Parameter, wodurch die Funktionswerte am Intervallende, damit die Fundamentalgleichung bekannt werden. Hillsche Differentialgleichung und Methode der unendlichen Determinanten. Mathiesche Funktionen und deren Integralgleichungen (Whittaker). Weierstraßsche Sätze über periodische Lösungen nichtlinearer Gleichungen. Satz von Bohr und Neugebauer über fastperiodische Lösungen. — Band II. Kap. VII. Asymptotisches Verhalten der Integrale. Asymptotische Entwicklungen bei Differentialgleichungen 2. Ordnung mit wesentlicher Singularität (höchstens vom Range 1) im Unendlichen, nach der Methode der schrittweisen Näherungen. Perronsche Grenzwertsätze, besonders für nichthomogene Gleichungen. Eingehende Ausführungen für den Fall $y' + A(x)y = 0$ bei nur stetigem $A(x)$, insbesondere wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$ im engeren oder weiteren Sinne existiert.

Oszillationseigenschaften und Stabilität für $A(x) > 0$, insbesondere für $A(x) \rightarrow +\infty$. Asymptotische Darstellung für große Werte eines in A quadratisch auftretenden Parameters. — Kap. VIII. Existenz- und Eindeutigkeitssätze im Großen. Hier werden neuere Entwicklungen behandelt, die systematisch an Kap. I anschließen. Fortsetzung der Integralkurven. Maximal- und Minimalintegral bei Mehrdeutigkeit der Lösungen. Vergleichssätze. Neuere Eindeutigkeitsbedingungen (Osgood, Nagumo, Perron). Existenzsatz von Perron für Integrale im Zwischengebiet zweier Kurven. Randwertaufgaben, Vergleichs- und Oszillationssätze für Gleichungen $y' = \lambda f(x, y)$, $f(x, y, y', y'') = 0$. Existenzsatz von Caratheodory mit Tonellischem Beweis für Systeme, deren rechte Seiten nur hinsichtlich der Unbekannten stetig, außerdem in x meßbar und durch eine L -summierbare Funktion majorisierbar sind. — Kap. IX. Singuläre Punkte und singuläre Lösungen. Diskussion von $y' = (ax + by):(cx + dy)$ mit kurzen Hinweisen auf die Verallgemeinerungsmöglichkeiten. Klassische Sätze mit neueren Präzisierungen und Verschärfungen für singuläre Lösungen bei impliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung. — Kap. X. Operatorenmethoden und Laplacetransformation. Differentialpolynome mit festen Koeffizienten und ihre Inversen. Rechtfertigung gewisser formaler Reihenentwicklungen nach Operatoren. Größter gemeinsamer Teiler für Differentialausdrücke mit veränderlichen Koeffizienten; Zurückführung von Systemen auf Einzelgleichungen nach Poole. Systeme mit festen Koeffizienten. Integration durch bestimmte Integrale. Laplacesche Transformation. Komplexe Fourieransätze. Funktionalkalkül nach Giorgi; elektrotechnische Beispiele. — Kap. XI. Numerische, graphische und mechanische Integration. Verfahren von Runge-Kutta, Störmer, Cauchy-Lipschitz. Ritzsche Methode für Eigenwertaufgaben. Verfahren der besten Approximation im Sinne „gewogener Potenzmittel“ mit ausführlichen Beweisen. Polygonale Annäherung. Isoklinen. Strahlkurven. Integrappen von E. Pascal und Vioris. — Kap. XII. Differentialgleichungen aus Anwendungsgebieten. Hier sehr sorgfältige Diskussionen oft schwer zugänglicher spezieller Gleichungen: Fall bei allgemeinem Widerstandsgesetz (z. B. proportional v^n , v = Geschwindigkeit). Gedämpfte Schwingungen bei allgemeinem Dämpfungsgesetz (abhängig von v), Relaxationsschwingungen (Dämpfung abhängig vom Ausschlag). Duffingsches Schwingungsproblem. Emdensche Gaskugeln. Thomas-Fermi'sche und andere Gleichungen der Atomtheorie. Spezielle Fälle der Schrödingergleichung. — Dieses Kapitel wurde in der 2. Auflage wesentlich erweitert. Hermann Schmidt (Braunschweig).

Simonart, Fernand: Sur l'équation de Riccati d'une famille isotherme. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 540—544 (1950).

Es wird eine Riccatische Gleichung konstruiert, deren allgemeines Integral eine Familie von Isothermen definiert. Die Form dieser Differentialgleichung ist die folgende:

$$y' + \frac{1}{ax+b} y^2 - \frac{a}{ax+b} y + \frac{ax+b}{a^2} = 0 \quad (a \neq 0).$$

Diese Gleichung kann integriert werden in geschlossener Form, und zwar ist das Integral

$$\frac{ax+b}{a^2} + \operatorname{arctg} \frac{ay}{ax+b} = c \quad (c = \text{konst.}).$$

Stefan Fenyő.

Karapandjitch, Gorge: Généralisation d'une condition de Bougaëff. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* 1, Nr. 3/4, 117—119 und französ. Zusammenfassg. 119—120 (1949) [Serbisch].

Parmi les conditions connues, nécessaires et suffisantes pour l'intégration de l'équation de Riccati $y' + P y^2 + Q y + R = 0$ (P, Q, R fonctions de x) se trouve la condition de Bugaev [Mat. Sbornik 17, 399—438 (1893)]

$$(*) \quad -2 \left[\frac{1}{4} Q^2 P - R P^2 - m P^3 \right] = Q' P - Q P', \quad m = c^{te}.$$

En appliquant une certaine transformation de contact, formée par N. Saltykow, nous obtenons la relation

$$R = S^{-p/(2p+1)} \left[\frac{S^{p/(2p+1)} Q + p P S^{-(p+1)/(2p+1)}}{2 P} \right]' \\ + P S^{-2p/(2p+1)} \left[\frac{S^{p/(2p+1)} Q + p P S^{-(p+1)/(2p+1)}}{2 P} \right]^2 - m P S^{-2p/(2p+1)},$$

où $S = -(2p+1) \int (P dx + A)$ (p, A constantes arbitraires), Pour $p=0$, cette dernière condition prend la forme $R = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{P} \right)' + \frac{1}{4} \frac{Q^2}{P} - m P$, qui est identique avec (*).

(Autoreferat.)

Viguier, Gabriel: Canonisation géométrique de l'équation d'Abel. *Periodicum math.-phys. astron.*, Zagreb, II. S. 4, 135—146 und kroatische Zusammenfassg. 147—148 (1949).

Die Kurven $M = \{\xi(t), \eta(t)\}$ und $L = \{F(t), G(t)\}$ sind durch gleiche Parameter aufeinander bezogen. Mit gegebenem $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und gesuchtem $\tau(t)$ bildet man $N = \{\xi + \alpha \tau, \eta + \beta \tau\}$ und verlangt, daß bei gegebenem $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$ die Gerade NL parallel zu $\left\{ \gamma \cdot \frac{d}{dt} (\xi + \alpha \tau), \delta \cdot \frac{d}{dt} (\eta + \beta \tau) \right\}$ sein soll. Das führt auf eine Abelsche Differentialgleichung zweiter Art von der Form $(S\tau + T)\tau' + P\tau^2 + Q\tau + R = 0$, für die damit eine geometrische Deutung gewonnen ist. *Gericke.*

Kasner, Edward and Don Mittleman: Second order differential equations of rank 2 in physics. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 35, 338—342 (1949).

Es werden die homogenen Koordinaten $z_1:z_2:z_3:z_4:z_5 = 1:y':y'^2:y'^3:y''$ eingeführt. Der Rang einer in y' und y'' algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist dann als Grad des entsprechenden homogenen z -Polynoms definiert. Die Verff. untersuchen den Ort der Krümmungsmittelpunkte der Integralkurven durch einen festen Punkt. Im Falle des Ranges 1 bzw. 2 ergeben sich hierfür spezielle Kubiken bzw. Sextiken. Eine Reihe von bekannten geometrischen und physikalischen Problemen, die auf Differentialgleichungen vom Range 2 führen, werden diskutiert. *Willi Rinow.*

Zwirner, Giuseppe: Alcuni teoremi sulle equazioni differenziali dipendenti da un parametro. *Ann. Triestini, Univ. Trieste, Sez. 2*, 18, 5—34 (1949).

L'A. integra l'equazione (1) $y' = f(x, y, \lambda)$, dove λ è un parametro, con le condizioni $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Si suppone la $f(x, y, \lambda)$ definita in un parallelepipedo con i lati paralleli agli assi x, y, λ oppure definita in un insieme del tipo $x_0 \leq x \leq x_1$, $\tau_1(x) \leq y \leq \tau_2(x)$, $c \leq \lambda \leq d$, con $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$ integrali della (1), relativi a due distinti valori di λ . Le condizioni importate alla $f(x, y, \lambda)$ sono di varia natura: ad es. la tesi è provata se $f(x, y, \lambda)$ è funzione crescente di λ , $\tau_1(x)$ e $\tau_2(x)$ corrispondono ai valori L_1 e $L_2 > L_1$ di λ ed è $\tau_1(x_2) < y_1 < \tau_2(y_1)$.

Luigi Amerio.

Zwirner, Giuseppe: Criteri di esistenza per un problema al contorno relativo all'equazione $y' = f(x, y; \lambda)$. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 19, 141—158 (1950).

L'A. generalizza risultati suoi [Rend. Sem. mat. Univ. Padova 15, 33—39 (1946) e recensione preced.] e di F. Cafiero (questo Zbl. 31, 213) relativi alla risoluzione del problema $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(x_0) = \varphi_1(\lambda)$, $y(x_1) = \varphi_2(\lambda)$.

Luigi Amerio.

Newman, M. H. A.: On the ultimate boundedness of the solutions of certain differential equations. *Compositio math.*, Groningen 8, 142—156 (1950).

The author considers the equation (1) $\ddot{x} + k \dot{x} f(x) + g(x) = k p(t)$, $k \geq 1$ and proves, under somewhat less restrictive conditions on the functions $g(x)$ and $p(t)$, some theorems proved by Cartwright and Littlewood (this Zbl. 29, 126). Roughly, the method adopted is to compare the solutions of (1) with those of the simpler equation $\ddot{x} + h \dot{x} + g(x) = 0$, $h > 0$. Let $f(x)$ and $g(x)$ be continuous for every x and $p(t)$ such that (1) has a solution for any assigned initial values $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Suppose also that there exists numbers a_0 and h such that: $g(x)/x > 0$ when $|x| > a_0$; $f(x) \geq 2h > 0$ when $|x| \geq a_0$; there exist a constant M such that $|p(t)| \leq M$, $\int_t^{t'} p(\tau) d\tau \leq M$, for all positive t, t' . Under these

assumptions, given $\varepsilon > 0$ and if $x(t)$ is a solution of (1), then it is impossible that ultimately (i. e. as $t \rightarrow \infty$) $|x(t)| \geq a_0 + \varepsilon$. Another typical result states that if in addition to the above restrictions, $|g(x)| \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$ then every solution of (1) is such that ultimately $|x(t)| < C$, $|\dot{x}(t)| < kC$, where C is a constant independent of k and the initial values. Some extensions and modifications of these and other results are indicated.

Mauricios Matos Peixoto.

Cecconi, Jaurès: Su di una equazione differenziale non lineare di secondo ordine. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat.*, III. S. 4, 245—278 (1950).

Si consideri l'equazione

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \left| \frac{dy}{dt} \right| + q \frac{dy}{dt} + y - p^2 y^3 = 0$$

con p e q costanti, $p > 0$, $q \geq 0$; l'equazione delle corrispondenti linee caratteristiche $\frac{dz}{dy} = \frac{-z|z| - qz - y + p^2 y^3}{z}$, $\left[\frac{dy}{dt} = z \right]$, ha nel piano (y, z) i due punti singolari $(-1/p, 0)$, $(1/p, 0)$ del tipo colle, e il punto $(0, 0)$ che è un nodo se $q^2 \geq 4$, e un fuoco se $q^2 < 4$. — L'A. mostra che le separatrici uscenti dai punti $(-1/p, 0)$, $(1/p, 0)$ determinano nel piano (y, z) una regione Z tale che se (η_0, ζ_0) è interno a Z , la soluzione della (1) corrispondente alle condizioni iniziali $y(t_0) = \eta_0$, $z(t_0) = \zeta_0$ è definita per $t \geq t_0$ e soddisfa la relazione (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[y^2(t) + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = 0$, mentre se (η_0, ζ_0) è esterno a Z l'integrale $y(t)$ non è indefinitamente prolungabile, e se T_0 è l'estremo superiore dei valori per cui $y(t)$ esiste si ha $\lim_{t \rightarrow T_0-0} \left[y^2(t) + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \infty$. Il comportamento degli integrali uscenti dai punti frontiera di Z è pure ben precisato. — L'A. studia poi l'equazione

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \left| \frac{dy}{dt} \right| + q \frac{dy}{dt} + y - p^2 y^3 = r \sin \omega t,$$

$p > 0$, $q > 0$, $\omega > 0$ e dimostra che se (η_0, ζ_0) è una coppia di valori iniziali per i quali rispetto all'equazione (1) sussiste la (2), allora la (3), quando r è sufficientemente piccolo, ammette una soluzione per la quale si ha

$$\text{extr. sup}_{t \geq t_0} \left[y^2(t) + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] < \infty; \quad y(t_0) = \eta_0, \quad y'(t_0) = \zeta_0,$$

così pure se r è sufficientemente piccolo la (3) ammette almeno una soluzione periodica di periodo $2\pi/\omega$.

Giovanni Sansone.

Langenhop, C. E. and A. B. Farnell: The existence of forced periodic solutions of second order differential equations near certain equilibrium points of the unforced equation. *Contrib. Theory of nonlinear Oscillations*, *Ann. Math. Studies* Nr. 20, 291—312 (1950).

Zunächst wird die Existenz periodischer Lösungen von $\ddot{x} + a \dot{x} + x + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} k \cos \omega t$ (mit $a > 0$, $k > 0$) mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes unter-

sucht. Die Differentialgleichung vermittelt eine topologische Abbildung einer x - y -Ebene (mit $y = \dot{x}$) auf sich, indem einem Punkt x, y zur Zeit t ein anderer Punkt zur Zeit $t + 2\pi/\omega$ zugeordnet wird; indem gezeigt wird, daß bei dieser Abbildung ein geschlossenes konvexes Gebiet auf sich selbst abgebildet wird, folgt die Existenz eines Fixpunktes und damit eine periodische Lösung. Nach ausführlicher Diskussion obiger Differentialgleichung wird der allgemeine Satz bewiesen: In $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = k e(t)$ seien $f(x), g(x)$ und $e(t)$ analytisch, $|e(t)| \leq 1$, $e(t)$ periodisch der Periode p ; dann besitzt diese Differentialgleichung für genügend kleines k eine periodische Lösung der Periode p in der Nachbarschaft des Punktes $x = x_0, \dot{x} = 0$, für welchen $g(x_0) = 0, g'(x_0) > 0, f(x_0) \neq 0$ ist.

Lothar Collatz.

Wasow, Wolfgang: On the construction of periodic solutions of singular perturbation problems. Contrib. Theory of nonlinear Oscillations, Ann. Math. Studies Nr. 20, 313—350 (1950).

In

$$\varepsilon^k \frac{d^n X}{dt^n} = F\left(X, \frac{dX}{dt}, \frac{d^2 X}{dt^2}, \dots, \frac{d^m X}{dt^m}, t, \varepsilon\right)$$

sei k ganzzahlig $> 0, n > m$, die rechte Seite analytisch in allen Argumenten und ε ein kleiner reeller Parameter. Die ungestörte Gleichung mit $\varepsilon = 0$ besitze eine periodische Lösung $u(t)$ der Periode T , die „Basislösung“. Setzt man $p_j(t) = \frac{\partial}{\partial u^{(j)}} F(u, u', \dots, u^{(m)}, t, 0)$, so wird $p_m(t) \neq 0$ für alle t vorausgesetzt.

Verf. nennt die Differentialgleichung parametrisch regulär, falls $n - m$ ungerade ist oder falls bei geradem $n - m$ gleichzeitig k gerade und $(-1)^{(n-m)/2} p_m(t) < 0$ ist, und parametrisch halbregulär, falls $n - m$ gerade und k ungerade ist, andernfalls parametrisch irregulär. Im „autonomen Fall“ hängt F nicht explizit von t ab. Im nichtautonomen Fall wird angenommen, daß F in t die Periode T besitzt; in diesem Falle besitze die „reduzierte Variationsgleichung“ $\sum_{j=0}^m p_j(t) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ keine nicht-triviale Lösung der Periode T (nicht entarteter Fall); dann gibt es in den parametrisch nicht-irregulären Fällen ein abgeschlossenes, $\varepsilon = 0$ enthaltendes Intervall I für ε , so daß für jedes ε aus I die Differentialgleichung eine periodische Lösung der Periode T besitzt. Im parametrisch regulären Fall ist $\varepsilon = 0$ ein innerer Punkt von I und im parametrisch halbregulären Fall ein Randpunkt. Im autonomen Fall heißt die Basislösung entartet, wenn die zugehörige reduzierte Variationsgleichung den charakteristischen Exponenten Null als mehrfache Wurzel hat. Im nicht entarteten Fall kann für die parametrisch nicht irreguläre Differentialgleichung auch jetzt die Existenz eines ε -Intervalles I mit der gleichen Eigenschaft wie im nichtautonomen Fall gezeigt werden. Zugleich ergibt die Störungsrechnung für die periodischen Lösungen und ihre Ableitungen bis zur m -ten Ordnung einschließlich für $\varepsilon \rightarrow 0$ in t gleichmäßige Konvergenz.

Lothar Collatz.

Mikusinski, J. G.: On Fite's oscillation theorems. Colloq. math. 2, 34—39 (1949).

Author considers the differential equation $y^{(n)} + A(x)y = 0$, where $A(x)$ is continuous, non-negative for $x \geq a$. If n is odd and $\int_a^\infty x^{n-1} A(x) dx$ is infinite, each solution either oscillates or tends monotonically to zero. If n is even, $\int_a^\infty x^{n-1-c} A(x) dx$ being divergent for some c in the range $0 < c < n - 1$, each solution oscillates. — Two unimportant misprints — in the first equation on p. 37 dx should be dt ; in the first paragraph of the paper the quantities α_ν, β_ν are not quite correctly specified.

W. W. Sawyer.

Ważewski, T.: Sur les systèmes de deux équations différentielles linéaires dont les intégrales tendent asymptotiquement vers une ellipse. C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III 41, 9—11 und polnische Zusammenfassg. 11—12 (1950).

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen des linearen Systems

$$x'(t) = a(t)x + b(t)y + f(t), \quad y'(t) = c(t)x + d(t)y + g(t)$$

wird folgendes Ergebnis angekündigt: Die Koeffizienten seien für $t \geq 0$ stetig, und a, b, c, d mögen für $0 \leq t < \infty$ eine totale Variation haben, es sei ferner

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < +\infty, \quad \int_0^\infty |g(t)| dt < +\infty,$$

und für jedes t seien die Lösungen s der charakteristischen Gleichung

$$(a-s)(d-s) - cb = 0$$

rein imaginär, und $|s| = |s(t)|$ habe eine positive untere Schranke. Dann „konvergiert“ sich jedes Integral für $t \rightarrow \infty$ auf einer Ellipse $-\gamma x^2 - 2\alpha xy + \beta y^2 = C$ wo α, β, γ die Grenzwerte von a, b, c für $t \rightarrow \infty$ sind. Über den Beweis wird angegeben, er beruhe darauf, daß für die Integrale die Funktion

$$\varphi(t) = -cx^2 + 2axy + by^2$$

für $t \rightarrow \infty$ einen Grenzwert habe.

Erich Kamke.

Volosov, V. M.: Zur Frage der Differentialgleichungen mit einem kleinen Parameter bei der höchsten Ableitung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 873—876 (1950) [Russisch].

Es werden Differentialgleichungen $\lambda^2 y'' + g(x, y) = 0$ behandelt, auf welche die Untersuchung von Tichonow (dies. Zbl. 37, 344) nicht anwendbar ist. Ist insbesondere $\lambda^2 y'' + g(x)y = 0$ gegeben, wo $g(x)$ in $\langle x_0, x_1 \rangle$ zweimal stetig differenzierbar und $0 < m \leq g(x) \leq M$ ist, so oszilliert jede von $y \equiv 0$ verschiedene Lösung für $\lambda \rightarrow 0$ immer häufiger um die triviale Lösung und ihre Extreme liegen immer genauer auf den „Stützkurven“ $y = \pm y(x_0) \sqrt{g(x_0)g(x)}$. Dieses Ergebnis wird ausgedehnt auf die allgemeinere, am Anfang angegebene Differentialgleichung; der (nicht angegebene) Beweis dürfte aus dem Satz für den Sonderfall folgen.

Erich Kamke.

Levinson, Norman: An ordinary differential equation with an interval of stability, a separation point, and an interval of instability. J. Math. Phys., Massachusetts 28, 215—222 (1950).

Als Beispiel zu einem Satz von Tichonov (dies. Zbl. 37, 344) wird die Differentialgleichung

$$(1) \quad \lambda^2 y''(y) - \frac{4y'}{y^4 + 3} + y = 0$$

untersucht, die für $\lambda \rightarrow 0$ in (2) $4\bar{y}' = \bar{y}(\bar{y}^4 + 3)$ übergeht. (2) hat eine Lösung mit $\bar{y}(0) = \frac{8}{19}$, $\bar{y}'(0) = 2$. Diese Lösung existiert nur in dem Intervall

$$0 < x < x_1 < \frac{11}{19},$$

in dem $\bar{y} \rightarrow 1 - 0$, $\bar{y}' \rightarrow 1 + 0$ für $x \rightarrow x_1$ ist. Die Lösungen von (1) mit denselben Anfangswerten $y(0) = \frac{8}{19}$, $y'(0) = 2$ existieren jedoch in einem größeren Intervall; sie streben für $\lambda \rightarrow 0$ gegen $\bar{y}(x)$ in $0 < x < x_1$, während sie für $x > x_1$ mit abnehmendem λ immer stärker oszillieren.

Erich Kamke.

Levinson, Norman: Perturbations of discontinuous solutions of non-linear systems of differential equations. Acta math., København 82, 71—106 (1950).

Vgl. die Voranzeige (dies. Zbl. 29, 358). — Es werden die Lösungen des Systems

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\eta}_\lambda(x) = \vec{f}(x, \eta_\lambda, z_\lambda, \lambda) \dot{z}'_\lambda(x) + \vec{\varphi}(x, \eta_\lambda, z_\lambda, \lambda), \\ \lambda \dot{z}'_\lambda(x) + g(x, \eta_\lambda, z_\lambda, \lambda) \dot{z}'_\lambda(x) + \vec{h}(x, \eta_\lambda, z_\lambda, \lambda) = 0, \quad \lambda > 0, \end{cases}$$

für $\lambda \rightarrow 0$ untersucht; dabei ist $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, ebenso sind $\vec{f}, \vec{\varphi}$ n -gliedrige Vektoren, und die Funktionen $\vec{f}, \vec{\varphi}, g, h$ sollen nebst den partiellen Ableitungen nach

x, y, z gleichmäßig stetig und beschränkt für $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ in einem Gebiet des x, y, z Raumes sein, das die nachstehend gebildete Kurve K_0 enthält. Die Lösungen werden als Kurven K_λ des $(n+2)$ -dimensionalen x, y, z -Raumes betrachtet und mit einer Kurve \bar{K} verglichen, die mittels des Systems

(2) $\bar{y}'(x) = \vec{f}(x, \bar{y}, \bar{z}, 0) \bar{z}'(x) + \vec{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z}, 0), g(x, \bar{y}, \bar{z}, 0) \bar{z}' + h(x, \bar{y}, \bar{z}, 0) = 0$
in folgender Weise konstruiert wird: Im Punkt $A = A(\alpha, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ sei $g(\alpha, \bar{y}_0, \bar{z}_0, 0) > 0$. Die durch A gehende Integralkurve von (2) existiere für $\alpha \leq x < \xi$ und erfülle dort die Ungleichung $g(x, \bar{y}(x), \bar{z}(x), 0) > 0$, während $g \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \xi - 0$ ist. Der Punkt $\xi, \bar{y}(\xi - 0), \bar{z}(\xi - 0)$ existiere und sei mit B bezeichnet. Der Bogen

AB ist das erste Stück von K .— Unter der Voraussetzung, daß $\sum_{v=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_v} f_v + \frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$

und $h \neq 0$ im Punkt B ist, schließt sich an AB ein Kurvenstück BA_1 an, das bei festem ξ die durch B gehende Integralkurve von $y'(\bar{z}) = \vec{f}(\xi, \bar{y}, \bar{z}, 0)$ ist, und zwar für wachsende oder abnehmende \bar{z} , je nachdem $h < 0$ oder > 0 im Punkt B ist. Diese Kurve möge sich fortsetzen lassen bis zu einer ersten Stelle $\bar{z}_{A_1} \neq \bar{z}_B = \bar{z}(\xi - 0)$,

für die $\int_{\bar{z}_B}^{\bar{z}_{A_1}} g(\xi, y(\bar{z}), \bar{z}, 0) d\bar{z} = 0$ ist, und es sei $g(\xi, y(\bar{z}_{A_1}), \bar{z}_{A_1}, 0) > 0$. Das Verfahren wird nun, falls möglich, mit A_1 statt A wiederholt usw. — Sind für die Integralkurve von (1) Anfangswerte $y_\lambda(x), z_\lambda(x)$ gegeben, welche die Ungleichungen

$$|y_\lambda(x) - \bar{y}_0| + |z_\lambda(x) - \bar{z}_0| \leq \delta_1, |z'_\lambda(x) - \bar{z}'(x)| \leq \delta_2/\lambda$$

erfüllen, so ist im ganzen Bereich $K_\lambda \rightarrow \bar{K}$ für $\lambda, \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$. Für gewisse Teile gilt, daß diese Limesbeziehung für die Funktionen und ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung sogar gleichmäßig gilt. — Es werden weiter Sätze über die Grenzwerte der partiellen Ableitungen nach den Anfangswerten hergeleitet. Die Sätze gelten auch für die Sonderfälle, daß die Gleichungen für y', \bar{y}' fehlen. Anwendung auf periodische Lösungen.

Erich Kamke.

Levinson, Norman: On stability of non-linear systems of differential equations. Colloq. math. 2, 40—45 (1949).

The author studies the stability of the solution $z = 0$ of the system

$$(1) \quad \dot{z} = Az + f(z, \dot{z}, t)$$

where z stands for a vector with components $z_i, i = 1, \dots, n$, A is a constant $n \times n$ matrix with elements a_{ij} , and f is a continuous vector with components f_i , small in a certain sense, such that $f(0, 0, t) = 0$. The results obtained give also some quantitative information about the behaviour of the solutions close to $z = 0$. The

norms of z and A are defined respectively by $|z| = \sum_{i=1}^n |z_i|$ and $|A| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Suppose that: (2) the real parts of the characteristic roots of A are all negative; (3) there exist two positive constants α and β , which depend only on A , such that for small $|z|$ and $|\dot{z}|$, $|f(z, \dot{z}, t)| \leq \alpha |z| + \beta |\dot{z}|, 0 \leq t < \infty$. Under these assumptions the following theorems are proved. (i) If $z = z(t)$ is a solution of (1) and $z(0), \dot{z}(0)$ are sufficiently small then there exists a constant J , independent of the initial values, such that for $0 \leq t < \infty$ both $|z(t)|$ and $|\dot{z}(t)|$ are bounded by $J|z(0)|$ and tend to zero as $t \rightarrow \infty$. (ii) If $B(t)$ is a continuous $n \times n$ matrix such that $|B(t)| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ the preceding result remains true when we replace (1) by the system $\dot{z} = Az + B(t)z + f(z, \dot{z}, t)$. Theorem (i) is still true if instead of (2) and (3) we assume (2') and (3'). (2') Every solution of the linear system with constant coefficients, $\dot{z} = Az$, is bounded for $0 \leq t < \infty$; this is the case, for instance, when the real parts of the characteristic roots of A are non positive and the purely imaginary roots are all distinct. (3') There exist two positive bounded

functions $g(t), h(t), 0 \leq t < \infty, 0 < h(t) < a < 1$, such that $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$,

$\int_0^\infty h(t) dt < \infty$, and such that $|f(z, \dot{z}, t)| \leq g(t) |z| + h(t) |\dot{z}|$ when $|z|$ and $|\dot{z}|$ are small. Similar results have been obtained by Bellman (this Zbl. 31, 399) under hypotheses that require among other things, the existence of and restrictions on $\partial f / \partial z_i, \partial f / \partial \dot{z}_i$. Mauricios Matos Peixoto.

Demidovič, B. P.: Über einen kritischen Fall der Stabilität im Sinne von Ljapunov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 1005—1008 (1950) [Russisch].

Hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösung (1) $\dot{x}_i = 0, i = 1, \dots, n$ des Differentialgleichungssystems (2) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n [a_{ij} + \varphi_{ij}(t)] x_j, i = 1, 2, \dots, n$ [in welchem a_{ij} konstant und $\varphi_{ij}(t)$ Funktionen in $(t_0, +\infty)$ von beschränkter Variation mit $\varphi_{ij}(+\infty) = 0$ sind] ist z. B., daß alle Integrale des Systems $\dot{y}_i = \sum a_{ij} y_j$ in $(t_0, +\infty)$ beschränkt sind und die Wurzeln $\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ der Gleichung (3) $|a_{ij} + \varphi_{ij}(t) - \delta_{ij} \varrho(t)| = 0$ nicht positiv sind [L. Cesari, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. 9, 163 (1940); dies. Zbl. 24, 35]. Für neuere Untersuchungen vgl. R. Bellman (dies. Zbl. 31, 399). — Es seien $A = \|a_{ij}\|, A_{ij}$ $i, j = 1, \dots, n$, die algebraischen Komplemente der Elemente a_{ij} von $A, S = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

$\|\Phi(t)\| = \|\varphi_{ij}(t) - A_{jn} \varphi_{in}(t) / A_{nn}\|$. In vorliegender kurzer Arbeit werden ohne Beweisführung mehrere Ergebnisse mitgeteilt, welche sich an das oben angeführte anknüpfen. Angenommen wird, daß alle Produkte und Quadrate der Funktionen $\varphi_{ij}(t), \varrho_i(t)$ für alle hinreichend großen t „vernachlässigt“ werden können [Rechnimmt an, daß unter „vernachlässigt“ „in $(t_0, +\infty)$ L -integrierbar“ zu verstehen ist]. Wenn derartige Glieder vernachlässigt werden, wird die Gleichung (3) linear

mit der einzigen Wurzel $\varrho_0(t) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \varphi_{ij}(t) / S$. Hier ein Ergebnis: Wenn $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, die Wurzeln der Gleichung $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ sind, und $\Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n-1, \lambda_n = 0$; wenn $\exp \left[\int_{t_0}^t \varrho_0(\alpha) d\alpha \right] < +\infty$ für alle

$t \geq t_0$ gilt; wenn $\int_{t_0}^t \|\Phi(x)\| \exp \left[\int_{\alpha}^t \varrho_0(\beta) d\beta \right] d\alpha < +\infty$ für alle $t \geq t_0$ gilt, dann ist die Lösung (1) des Differentialsystems (2) stabil. Lamberto Cesari.

Gusarova, R. S.: Über die Beschränktheit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 313—314 (1950) [Russisch].

Making use of a previous result [Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 241—246 (1949)] the author proves that all solutions of the differential equation $y'' + p(x)y = 0$ are bounded in $(-\infty, +\infty)$ provided that the continuous periodical function $p(x)$ with period π satisfies the following conditions: i) $p(x) \geq n^2, -\infty < x < +\infty$; ii) $\pi \int_0^\pi p(x) dx \leq 4(n+1) + n^2(\pi^2/2 + 4)$, where n is one of the integers $n = 0, 1, 2, 3, 4$. The case $n = 0$ is contained in a previous result of Liapounoff. Lamberto Cesari.

Ascoli, Guido: Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 129—134 (1950).

Das Problem der Stabilität der Lösungen des Differentialgleichungssystems (1) $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + \varphi_{ik}(t)) x_k, i = 1, 2, \dots, n, [a_{ik} \text{ konstant, } \varphi_{ik}(t) \text{ in } (t_0, +\infty) L\text{-integrierbare Funktionen}]$ wird gewöhnlich auf die Stabilität der Lösungen des Systems (2) $\dot{y}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k, i = 1, \dots, n$, zurückgeführt. — Verf. bezeichnet das System (2) als stabil im engeren Sinne, wenn alle Lösungen des Systems (2)

sowie die seines adjungierten Systems (3) $\dot{v}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k$ stabil sind. In diesem Fall untersucht Verf. die Stabilität der Lösungen des Systems (1) und die des zusätzlichen Systems (4) $\dot{u}_i = \sum_{k=1}^n (a_{ki} + \varphi_{ki}(t)) u_k$, wobei frühere Ergebnisse in Betracht gezogen werden [D. Caligo, Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. S. 1, 497—506 (1940); dies. Zbl. 24, 207; A. Winter, Amer. J. Math. 68, 185—213 (1946)].

Lamberto Cesari.

Ascoli, Guido: Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 210—213 (1950).

(Teil I s. vorsteh. Referat.) Verf. stellte [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 22, 234—243 (1935); dies. Zbl. 12, 405] für die Differentialgleichung $\dot{x} + A(t)x = 0$ eine hinreichende Stabilitätsbedingung auf, wenn $A(t)$ die Summe einer Funktion von beschränkter Variation in $(t_0, +\infty)$ und einer in $(t_0, +\infty)$ absolut L -integrierbaren Funktion ist. — Die Differentialgleichung (1) $\ddot{x} + (1 + t^{-1} \sin at)x = 0$ wird deshalb nicht von diesem Theorem erfaßt. Verf. beweist in vorliegender Arbeit mit Hilfe einer geeigneten Überlegung, daß die Lösungen der Gleichung (1) alle stabil sind, wenn $|a| \neq 2$, während dieses für die Fälle $a = 2, a = -2$ nicht eintritt.

Lamberto Cesari.

Bilharz, Herbert: Zum Stabilitätskriterium in der Theorie des Balancierens. Math. Nachr., Berlin 2, 314—316 (1949).

Es wird ein Kriterium für die Stabilität der Lösungen einer Funktionaldifferentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hergeleitet. Die verwendete Methode ergibt zunächst nur eine notwendige Bedingung (vgl. L. Collatz, dies. Zbl. 29, 80) und nicht auch, wie irrtümlich behauptet, eine hinreichende Bedingung. Eine diesbezügliche Ergänzung des Beweises wird in den Math. Nachr. im Rahmen einer Arbeit des Verf. über das Hurwitzsche Problem für ganze transzendente Funktionen erscheinen, so daß der a. a. O. formulierte Satz voll gültig bleibt.

Hermann Ludwig Schmid.

Povzner, A.: Über Differentialgleichungen von Sturm-Liouvilleschem Typus auf der Halbachse. Mat. Sbornik, n. S. 23, 1—52 (1948) [Russisch].

The author studies in association the two equations

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \varrho(x)u + \lambda u = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varrho(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \varrho(y)u,$$

where $\varrho(x)$ is a continuous even function defined on the real axis. He denotes by $T_x^y(f)$ the solution of (2) such that $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u(x, 0)/\partial y = 0$. According to Riemann's method we have then

$$T_x^y(f) = \frac{1}{2} (f(x+y) + f(x-y)) - \int_0^\infty f(t) w(t, x, y) dt.$$

Chapter I (pp. 6—23) gives estimates for $w(t, x, y)$ corresponding to the hypotheses $\varrho(x) = O(1/x^{2+\epsilon})$, $O(1/x^{3+\epsilon})$. Necessary and sufficient conditions are then found for the operator T_x^{cy} [obtained from $T_x^{(c)}$ by replacing $\varrho(x)$ by $c\varrho(x)$, where c is a parameter] to be a bounded operator. Chapter II (pp. 23—34) considers in a similar way the equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \varrho(y)u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varrho(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

which give rise to operators P_x^y, Q_x^y . These have the property that $P(\cos(\sqrt{\lambda}x)) \varphi(x, \lambda)$, $Q(\varphi(x, \lambda)) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$, where $\varphi(x, \lambda)$ is the solution of (1) such that $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$. There are boundedness theorems such as this: Let $\varphi(x) = O(1/x^{3+\epsilon})$. Then, for $\varphi(x, \lambda)$ to be bounded for all $\lambda \geq 0$, it is necessary and sufficient that $\varphi(x, 0)$ should be bounded. Chapter III (pp. 34—52) studies a

normed ring of functions f with norm and product given by

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(t)| dt, \quad f \circ g = \int_0^\infty T_x^y(f) g(y) dy,$$

it being shown that the construction satisfies Gelfand's axioms. Also considered

is the norm $\|g\| = \int_0^\infty (1+x) |g(x)| dx$. It is shown that such rings contain complex conjugates of their elements, and contain no generalised nilpotent elements. Their maximal ideals are determined explicitly. Some of the results were used in previously published papers of the author [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 43, 387—391 (1944), 53, 299—302 (1946)].

Frederick V. Atkinson.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Cramlet, Clyde M.: A generalization of a theorem of Jacobi on systems of linear differential equations. Canadian J. Math. 2, 420—426 (1950).

A complete system of partial differential equations is supposed reduced to the Jacobian form, $X_i u = 0$, $i = 1, \dots, k$, where $X_i = \sum_{s=1}^n a_i^s \frac{\partial}{\partial x^s}$ and $X_i X_j - X_j X_i = 0$. Author shows that a multiplier M then exists that makes $\sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x^s} (M a_i^s) = 0$, $i = 1, \dots, k$. A knowledge of $(n - k - 1)$ integrals of the system, together with such an M , gives an exact differential equation for the last integral. The proof is by simple tensor methods. Slight misprints — in equation (1.4) ∂ should be d ; line 8, page 423 should read $(A = k + 1, \dots, n)$; in equation (6.1) the upper index α_1 should be σ_1 .

W. W. Sawyer.

Aezél, J.: Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen. Acta Sci. math., Szeged 13, 179—189 (1950).

Verf. zeigt an einigen speziellen Fällen, wie man die Lösung von gewissen Funktionalgleichungen auf die Lösung von partiellen Differentialgleichungen zurückführen kann. In dieser Arbeit werden folgende Sätze bewiesen: Satz 1: Aus $z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)]$ folgen

$$(1) \quad \frac{z_{xy}}{z_y} - \frac{z_{xx}}{z_x} = X(x); \quad \frac{z_{xy}}{z_x} - \frac{z_{yy}}{z_y} = Y(y); \quad \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = Z(z)$$

und auch (2) $X(t) = Y(t) = Z(t)$ und umgekehrt. Daraus folgt, daß die allgemeinste streng monotone, zweimal differenzierbare Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1), ebenso wie die der Funktionalgleichung gleich

$$z = F^{-1} [a F(x) + b F(y) + c] \quad \text{mit} \quad F(t) = \int \exp \left(- \int X(t) dt \right) dt$$

ist. Satz 2: Aus der Funktionalgleichung $z[z(x, y), t] = z[x, z(y, t)]$ folgen die Differentialgleichungen (1), und die partiellen Differentialgleichungen: $z_x g(y) = z_y f(x)$.

$$(3) \quad \frac{f(x)}{z_x} = \frac{g(y)}{z_y} h(z)$$

mit den Bedingungen (2) und (4) $f(t) = g(t) = h(t)$ (und umgekehrt). Die allgemeinste streng monotone, differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung, ebenso die von (3) mit (4) ist

$$z(x, y) = F^{-1} [F(x) + F(y)] \quad \text{mit} \quad F(t) = \int \exp \left(- \int x(t) dt \right) dt = c \int f(t) dt.$$

Satz 3: Aus der Funktionalgleichung $z[z(x, y), t] = z(x, y + t)$ folgt $z_x = f(x) z_y$ und $z(x, 0) = x$. Es folgen auch die Gleichungen (1), nebst der Bedingung (5) $Z(t) = X(t)$, $Y(t) = 0$ (und umgekehrt). Die allgemeinste streng monotone, differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung, ebenso die von (1) nebst (5) ist

$$z = F^{-1} [F(x) + y] \quad \text{mit} \quad F(x) = \int f(t) dt.$$

Die Bedeutung dieser Sätze liegt in dem Mangel einer allgemeinen Theorie von Funktionalgleichungen vom betrachteten Typus.

Stefan Fenyő.

Sauer, R.: Dreidimensionale Probleme der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **30**, 347—356 (1950).

Die Berechnung von stationären Überschallströmungen im Raume, von instationären Vorgängen in ebener und achsensymmetrischer Strömung usw. erweckt das Bedürfnis nach Charakteristikenverfahren bei 3 unabhängigen Veränderlichen. In der vorliegenden Arbeit erfährt dieses Problem eine grundsätzliche Behandlung. An Stelle einer Koordinatenebene mit zwei Scharen von Charakteristiken (Machscher Linien) tritt nun ein Koordinatenraum mit charakteristischen Doppel-Konoiden (Machschen Kegeln), welche den Einflußbereich eines Punktes abgrenzen. Die Anfangsbedingungen sind nun nicht auf einem Kurvenstück, sondern auf einem Flächenstück vorgegeben, welches völlig außerhalb der von ihm ausgehenden Machkegel liegen muß. Die von der Randkurve des Flächenstückes ausgehenden charakteristischen Konoide besitzen zwei einhüllende „charakteristische“ Flächen, welche den „Bestimmungsbereich“ und den „Einflußbereich“ des Flächenstückes abgrenzen. Die „Verträglichkeitsbedingungen“, welche auf solchen charakteristischen Flächen existieren, stellen eine Bindung zwischen den beiden „inneren“ (tangentialen) Ableitungen der Abhängigen dar. Aus der Form der Machkegel ergibt sich die Lage neuer Gitterpunkte, deren abhängige Variablen mit den Verträglichkeitsbedingungen zu bestimmen sind. — Gesondert werden die Reduktionen auf 2- und 1-dimensionale Probleme und die halblinaren Nachbarlösungen drehsymmetrischer und kegelsymmetrischer Lösungen besprochen. Das Verfahren wird an der stationären Überschallströmung erläutert und dem Verfahren von A. Ferri gegenüber gestellt. Zahlreiche Zitate geben einen Überblick über das Gebiet. Verdichtungsstöße sind nicht behandelt.

Klaus Oswatitsch.

Bergman, S. and M. Schiffer: Various kernels in the theory of partial differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 559—563 (1950).

Ausgehend von der partiellen Differentialgleichung $(1) \Delta u = q(P)u$ [$q(P)$ positiv und stetig differenzierbar im abgeschlossenen von analytischen Kurven begrenzten Bereich D der x, y -Ebene] und dem zu (1) gehörigen Energieintegral:

$$E(u, u) = \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } u) + q u^2 d\tau$$

gelangen Verff. zu der wichtigen regulären Kerndarstellung: $E\{K(P, Q), u(P)\} = u(Q)$ für jede Lösung u von (1) mit endlichem $E(u, u)$. Dabei gilt: $K(P, Q) = N(P, Q) - G(P, Q)$; $L(P, Q) = N(P, Q) - G(P, Q)$; $N(P, Q)$, $G(P, Q)$ bedeuten die Neumannsche bzw. Greensche Funktion zu (1) bezgl. D . Seien N_1, G_1 die entsprechenden Funktionen für ein Teilgebiet D_1 von D , so wird weiter für $K_1 = N_1 - G_1$ eine Reihendarstellung hergeleitet, die K_1 bei Kenntnis von K und L zu berechnen gestattet. Schließlich wird das asymptotische Verhalten von $K - K_1, L - L_1$, wenn $D_1 \rightarrow D$, ermittelt.

Herbert Beckert.

Bergman, S. and M. Schiffer: Some linear operators in the theory of partial differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA. **36**, 742—746 (1950).

Seien $D_1 \subset D_2$ analytische Bereiche der x, y -Ebene, $D_0 = D_2 - D_1$ das Restgebiet, Σ_i die Funktionenräume der Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(P)u, \quad q \text{ positiv,}$$

über D_i mit endlicher Norm:

$$\Sigma_i(u, u) = \iint_{D_i} (\text{grad } u \cdot \text{grad } u + q u^2) d\tau.$$

Bezeichnen $N_i(P, Q)$, $G_i(P, Q)$ die Neumannschen bzw. Greenschen Funktionen bez. (1) und D_i , so führen Verff. wichtige Integralrelationen an, die letztere mit-

einander verknüpfen (vgl. die Arbeit der Verff.: dies. Zbl. 30, 255). Anschließend werden über Σ_1 und Σ_0 zwei mit N_i, G_i geeignet in Beziehung stehende vollstetige lineare Integraloperatoren eingeführt. Die Behandlung des Eigenwertproblems führt auf zwei vollständige orthonormale Systeme: (u_i) über Σ_1 und (v_i) über Σ_0 , die durch eine einfache lineare Integraloperation aufeinander abbildbar sind. Das Hauptresultat gipfelt in einer bilinearen Entwicklung der Differenzen: $G_2(P, Q) - G_1(P, Q)$, $P, Q \in D_1$, bzw. $G_2(P, Q) - G_0(P, Q)$, $P, Q \in D_0$, nach dem System der (u_i) bzw. (v_i) . Schließlich wird die Verbindung zu den Eigenwertproblemen vom Stekloffschen Typus hergestellt und eine analoge Theorie für die Neumannschen Funktionen aufgezeigt.

Herbert Beckert.

Krzyżański, M.: Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence. *Studia math.* 11, 95—125 (1950).

Una estensione del problema di Dirichlet consiste nell'ammettere che la soluzione presenti della discontinuità in alcuni punti della frontiera $Fr(D)$ del dominio D di integrazione. Teoremi di unicità per tale problema sono dovuti a Zaremba, Picone e Leja. L'A. estende tali teoremi a una qualsiasi equazione lineare di tipo ellittico del secondo ordine e dimostra, sotto convenienti ipotesi, il teorema di esistenza. I risultati sono poi generalizzati anche alle equazioni di tipo parabolico.

Luigi Amerio.

Pogorzelski, Witold: Sur les propriétés du potentiel retardé. *Prace mat.-fiz.* Warszawa 47, 61—66 (1949).

Soit $\mu(P, t)$ une densité de masses à l'instant t dans l'espace, pourvue de certaines dérivées premières et secondes (bornées par exemple) dans un domaine D , dans un certain intervalle de temps. L'A. considère le potentiel $V(M, t)$, retardé de $\mu(P, t - MP/c)$ ($c = \text{const.}$) et démontre qu'il satisfait à $(\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2})_M = c\pi\mu(M_0, t)$. Il étudie de même un potentiel retardé de double couche et démontre encore pour sa discontinuité la même formule que pour le potentiel ordinaire. Mais ce sont là des résultats classiques que l'on trouve par exemple à peu près dans Poincaré [*Rend. Circ. mat. Palermo* 29, 169—260 (1910), p. 173].

Marcel Brelot.

Višik, M. I.: Methode der orthogonalen und direkten Zerlegungen in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen. *Mat. Sbornik*, n. S. 25 (67), 189—234 (1949) [Russisch].

Die Arbeit besteht (im Anschluß an die Arbeiten von Sobolev aus den Jahren 1935—38) in einer weitgehenden Verallgemeinerung der von Weyl in der Potentialtheorie verwendeten Methode der orthogonalen Projektionen [*Duke math. J.* 7, 414—444 (1940); dies. Zbl. 26, 20], d. i. einer Methode zur Lösung von Randwertaufgaben der Laplaceschen Gleichung in einem vorgegebenen Bereich G . Die Methode wird auf selbstadjungierte elliptische Differentialgleichungen (D.G.) der Ordnung $2m$ allgemeinsten Art übertragen, und zwar auf solche Gleichungen $L(u) = 0$, die als Eulersche Gleichung eines quadratischen Funktionals auftreten. — Zunächst wird die speziellere D.G. zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} (\Delta^m + L_0)u &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^{2m} u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1}^2 \dots \partial x_{i_m}^2} \\ &+ (-1) \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}=1}^n \theta_{k_1 \dots k_{m-1}} \frac{\partial^{2m-2} u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{k_1}^2 \dots \partial x_{k_{m-1}}^2} + \dots \\ &+ (-1)^{m-1} \sum_{l=1}^n \theta_l \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_l^2} + (-1)^m \theta_0 u(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

wo die Summation über alle möglichen Systeme ganzer Zahlen i_s und k_r mit Werten zwischen 1 und n ausgeführt wird und die Koeffizienten θ_i gleich 1 oder 0 sind, wobei sie sich nicht ändern, wenn man die Reihenfolge der Indizes vertauscht. Die Methode besteht in der Einführung eines Hilbertschen Funktionenraumes $H(\Delta^m + L_0)$, dessen Elemente Funktionensysteme $(h) = (h_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n), \theta_{k_1 \dots k_{m-1}} h_{k_1 \dots k_{m-1}}(x_1, \dots, x_n), \dots, \theta_l h_l(x_1, \dots, x_n), \theta_0 h(x_1, \dots, x_n))$,

bestehend aus quadratisch summierbaren Funktionen, sind, die ebenfalls bei Vertauschung der Reihenfolge der Indizes sich nicht ändern. Das Skalarprodukt in diesem Raum ist erklärt durch:

$$\begin{aligned}
 ((h), (g))_{\Delta^m + L_0} = & \int_G \cdots \int \left[\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n h_{i_1 \dots i_m} g_{i_1 \dots i_m} \right. \\
 & \left. + \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}=1}^n \theta_{k_1 \dots k_{m-1}} h_{k_1 \dots k_{m-1}} g_{k_1 \dots k_{m-1}} + \cdots + \sum_{l=1}^n \theta_l h_l g_l + \theta_0 h g \right] dx_1 \cdots dx_n.
 \end{aligned}$$

Ferner werden folgende Unterräume von $H(\Delta^m + L_0)$ eingeführt: 1. $F(\Delta^m + L_0)$, dessen Elemente Funktionensysteme $(f) = (f_{i_1 \dots i_m}, \theta_{k_1 \dots k_{m-1}} f_{k_1 \dots k_{m-1}}, \dots, \theta_0 f)$ sind, deren Komponenten $f_{i_1 \dots i_m}, \dots$ (verallgemeinerte) partielle Ableitungen einer in einem beliebig vorgegebenen Würfel $K \subset \bar{K} \subset G$ erklärten Funktion f sind:

$$\frac{\partial^m f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} = f_{i_1 \dots i_m}(x_1, \dots, x_n) \text{ für alle Systeme } (i_1, \dots, i_m),$$

und
$$\frac{\partial^r f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_r}} = f_{s_1 \dots s_r}(x_1, \dots, x_n), \text{ falls } \theta_{s_1 \dots s_r} = 1, \text{ für } r = 1, \dots, m-1.$$

2. $Z^0(\Delta^m + L_0) \subset F(\Delta^m + L_0)$ [mit der abgeschlossenen Hülle $Z(\Delta^m + L_0)$], dessen Elemente (ζ^0) aus Komponenten bestehen, die die entsprechenden partiellen Ableitungen einer in G 2-mal stetig differenzierbaren Funktion $\zeta^0(x_1, \dots, x_n)$ sind, die in einer von (ζ^0) abhängigen Randzone von G verschwindet (d. h. außerhalb eines Gebietes $G' \subset G \subset G$). 3. $U(\Delta^m + L_0)$, dessen Elemente $(u) = (u_{i_1 \dots i_m}, \dots, \theta_0 u)$ Lösungselemente sind, d. h. in einem beliebigen K existiert eine (verallgemeinerte) Lösung $u(x_1, \dots, x_n)$ der Gleichung $(\Delta^m + L_0)u = 0$, deren (verallgemeinerte) partiellen Ableitungen mit den entsprechenden Komponenten von (u) zusammenfallen. — Bewiesen wird die orthogonale Zerlegung von F in U und Z : $F = U \oplus Z$. Weiter wird gezeigt, daß (f) ein Randelement ist, in dem Sinn, daß die Angabe von (f) gleichbedeutend ist mit der Angabe der Randwerte von f und seiner normalen Ableitungen $\zeta f \zeta n, \dots, \zeta^{m-1} f \zeta n^{m-1}$ auf dem Rande S von G (Randwertaufgabe A), während die Funktion ζ , die einem Element (ζ) zugehört, samt ihren normalen Ableitungen bis zur $(m-1)$ -Ordnung verschwindende Randwerte besitzt. Obige Zerlegung, die auch in der Form $(f) = (u) + (\zeta)$ ausgedrückt werden kann, so daß (f) als Summe seiner Projektionen auf U und auf Z erscheint, entspricht hiernach der Randwertaufgabe A , und durch die Projektion des Elementes (f) auf den Unterraum U erhält man deren Lösung. — Dasselbe Verfahren wird dann auf die orthogonale Zerlegung eines anderen geeigneten Unterraumes Ψ von H angewandt, wobei in seiner Zerlegung wieder der Unterraum der Lösungselemente U auftritt. Auch diese Zerlegung entspricht einer Randwertaufgabe, und zwar einer, die als weitgehende naturgemäße Verallgemeinerung der gemischten Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen D.G. 2. Ordnung angesehen werden kann. — Alle Ergebnisse werden dann von der D.G. $(\Delta^m + L_0)u = 0$ auf die allgemeinere $L(u) = 0$ übertragen. Da verschiedene quadratische Funktionale $((f), (f))_L$ zu derselben Gleichung $L(u) = 0$ gehören können und zu jedem ein Unterraum $\Psi(L)$ gehört, so entspricht jeder Unterraum $\Psi(L)$ eindeutig einer Randwertaufgabe der allgemeinen Art dieser Gleichung und seine Zerlegung ihrer Lösung. — Diese Methode erfordert es, daß das gegebene Randwertelement (f) eine endliche Norm besitzt (im Falle der Laplaceschen Gleichung ein endliches Dirichletsches Integral), dasselbe ergibt sich für die Lösungselemente. Für die Randwertaufgabe A wird gezeigt, daß sich neben der orthogonalen Zerlegung von $F(L)$ auch eine ihr ebenso entsprechende direkte Zerlegung angeben läßt, $F(L) = U(L) + Z(L)$, für deren Bestehen die obige Voraussetzung für die Elemente (f) von $F(L)$ sich durch eine sehr allgemeine ersetzen läßt, der eine beliebige in G 2-mal stetig differenzierbare Lösung von $L(u) = 0$ genügt, (falls diese eine glatte Fundamentallösung besitzt), so daß der Unterraum $U(L)$ von $F(L)$ nunmehr alle solche Lösungen der D.G. enthält. — Bezüglich der zugelassenen Gestalt des Randes S von G , ferner der Begriffe der verallgemeinerten partiellen Ableitung und desgleichen Lösung der D.G., sowie einer Lösung im „starken“ Sinn enthält die Arbeit noch verschiedene verschärfte Präzisierungen der Resultate, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Im letzten Abschnitt befaßt sie sich noch mit einer Übertragung der Theorie der in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet harmonischen Funktionen mit vorgegebener ein- bzw. $(n-1)$ -dimensionaler Periode aus der erwähnten Arbeit von Weyl auf die allgemeine selbstadjungierte elliptische D.G. $L(u) = 0$.

Erik Svenson.

Germay, R. H. J.: Sur la fonction de Riemann associée à l'équation aux dérivées partielles du second ordre, de forme linéaire, du type hyperbolique. Bull. Soc. Sci. Liège 18, 383—390 (1949).

Konstruktion der Riemannschen Funktion einer linearen Differentialgleichung

$L_\infty(z) = 0$ mit Koeffizienten, die als Grenzwerte von gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen gegeben sind $\left[L_\infty(z) \equiv \lim_{v \rightarrow \infty} L_v(z) \right]$, durch einen Iterationsprozeß, bei dem nicht die Koeffizienten von $L_\infty(z)$, sondern der L_v sukzessive benutzt werden.

Karl Stellmacher.

Stampacchia, Guido: Il problema di Goursat per un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico. Giorn. Mat. Battaglini **79**, 66—85 (1949).

Für die Differentialgleichung (*) $s = f(x, y, u, p, q)$, worin $p = u_x$, $q = u_y$, $s = u_{xy}$, wird eine Lösung u gesucht, die auf 2 vorgegebenen, sich schneidenden Kurven der x, y -Ebene vorgegebene Werte annimmt. Über die Existenztheoreme von E. E. Levi, Picone und neuerdings M. Cinquini Cibrario (dies. Zbl. **28**, 230—231), die die Existenz und Eindeutigkeit des Problems im kleinen garantieren, hinausgehend, wird hier für ein gewisses den Schnittpunkt zwischen Γ_1 und Γ_2 enthaltendes, achsenparalleles, fest vorgegebenes Rechteckgebiet R Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen. Voraussetzungen u. a.: Lipschitzbedingung für f hinsichtlich u, p, q und Beschränktheit von u, p, q ; ferner seien Γ_1, Γ_2 stetige Kurven mit stetiger Tangente. Die Tangente von Γ_1 darf in R nie die Richtung der y -Achse annehmen, die Tangente von Γ_2 nicht die x -Richtung. Beide Kurven laufen von O aus und haben in R nirgends einen 2. Schnittpunkt oder gleiche Tangentenrichtung. Ihre Tangenten dürfen in O durch die Koordinatenachsen nicht harmonisch getrennt werden.

Karl Stellmacher.

Ladyženskaja, O.: Über die Lösung des gemischten Problems für hyperbolische Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 647—650 (1950) [Russisch].

Gesucht eine Lösung der hyperbolischen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X) u - \varphi(X, t)$$

für $t \geq 0$ innerhalb eines gewissen Gebietes Ω der $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ mit dem stückweise glatten Rand Γ derart, daß für $t = 0$ in $\Omega + \Gamma$ $u = \partial u / \partial t = 0$ und für alle $t \geq 0$ u auf Γ „im Mittel“, verschwindet:

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{S_r} u^2 d\Omega = 0.$$

(Dabei S_r streifenförmiges Gebiet von der Dicke r , innen am Rand Γ .) — Die Lösung wird gewonnen durch Anwendung der Laplaceschen Transformation auf (1), aber nur bezüglich t . Setzt man $v(X, \lambda) = \int_0^\infty u(X, t) e^{-\lambda t} dt$, so wird aus (1) die inhomogene elliptische Differentialgleichung:

$$(3) \quad \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \sum b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + c v = \lambda^2 v + \varphi(X, \lambda),$$

für die nun die erste Randwertaufgabe zu lösen ist: Die Lösung v soll [entspr. (2)] auf Γ im Mittel verschwinden. Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung v mittels Differenzengleichungen.

Karl Stellmacher.

Nevanlinna, Rolf: Über die Anwendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie. Acta Sci. math. Szeged, **12 A**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 146—160 (1950).

Dans cet article prolongeant et reprenant un travail déjà ancien [J. reine angew. Math. **180**, 121—128 (1939), ce Zbl. **20**, 28] et lié à un autre récent (ce Zbl. **31**, 353) l'A. étudie sur les surfaces de Riemann un problème généralisant la méthode alternée résolvant le problème de Dirichlet. Ce problème généralisé est équivalent à la résolution d'une équation intégrale étudiée dans quelques cas généraux.

Marcel Brelot.

Brelot, Mareel: Le problème de Dirichlet „ramifié“. Ann. Univ. Grenoble, II. S. 22, 167—200 (1947).

In der Ebene gibt die Methode der konformen Abbildung ohne weiteres die sinngemäße Aufstellung und Lösung der ersten Randwertaufgabe für Gebiete an die Hand, die nicht von Jordankurven berandet werden, so daß unerreichbare Randpunkte auftreten können oder ein einzelner Randpunkt durch die verschiedenen Annäherungsmöglichkeiten natürlicherweise zu mehreren, evtl. unendlich vielen Randpunkten und -werten Anlaß gibt (vgl. Evans, The logarithmic potential, New York 1927). Hier wird das entsprechende Problem mit annäherungsabhängigen Randwerten (problème ramifié) für beliebige Gebiete im n -dimensionalen euklidischen Raume betrachtet, den man noch durch Hinzunahme des unendlich fernen Punktes abschließt. Verf. benutzt einerseits die Untersuchungen von de la Vallée Poussin [Actual. sci. industr. no 578 (1937); dies. Zbl. 19, 262] über das klassische Dirichletsche Problem, andererseits die Begriffsbildungen der allgemeinen Topologie, wobei insbesondere Ideen von Mazurkiewicz [Fundam. Math., Warszawa 26, 150—155 (1936); dies. Zbl. 13, 324] zum Tragen kommen. Die gewonnenen Ergebnisse werden insbesondere verwendet, um vertiefte Einsichten in das klassische Dirichletsche Problem zu geben, etwa in die Unterscheidung von regulären und irregulären Randpunkten, und den Begriff des harmonischen Maßes zu verallgemeinern; auch die von der konformen Abbildung bekannte Theorie der Primenden wird eingeordnet. Die Lösung des verzweigten Dirichletschen Problems läßt sich übrigens durch ein Daniellsches Integral darstellen, an dessen Stelle im Falle der Unlösbarkeit die dann verschiedenen Werte von oberem bzw. unterem Integral zu betrachten sind.

Walter Brödel.

Bochner, S.: Dirichlet problem for domains bounded by spheres. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 24—25 (1950).

Es sei R ein beschränktes Gebiet des n dimensionalen Euklidischen Raumes E_n , das von einer oder endlich vielen Kugeln K_1, \dots, K_r begrenzt werde. $F(x_1, \dots, x_n)$ sei in R stetig differenzierbar, derart, daß

$$\|F\| = \sqrt{\int_R \sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_v}\right)^2 d\tau}$$

existiere. Es wird gezeigt, daß es eine über die Kugel K_q ($q = 1, 2, \dots, r$) quadratisch integrierbare Randfunktion f so gibt, daß, falls man bezüglich K_q Polarkoordinaten $r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ einführt und $F(x_1, \dots, x_n) = f(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ setzt, für die Randfunktion $f(r_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ gilt

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \int_{K_q} |f(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) - f(r_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})|^2 d\omega = 0$$

In R gibt es eine harmonische Funktion $H^0(x_1, \dots, x_n)$ mit endlichem $\|H^0\|$, die auf K_q die Randwerte f annimmt. Es gilt $\|F\| \rightarrow \|H^0\|$ (das Gleichheitszeichen steht nur für $F = H^0$). Für eine beliebige harmonische Funktion H mit endlichem $\|H\|$ gilt

$$(F - H^0, H) = 0 \quad \text{mit} \quad (F, G) = \int_R \sum_{v=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_v} \frac{\partial G}{\partial x_v} d\tau.$$

H^0 erweist sich als Minimum von $\|F - H\|$ für alle H mit endlichem $\|H\|$. — Am Schluß der Arbeit wird auf eine Verallgemeinerung der Douglasschen Lösung des Plateauschen Problems (I. Douglas, Trans. Amer. math. Soc. 33, 263—321 (1931); dies. Zbl. 1, 141] eingegangen.

Kurt Schröder.

Jacobson, A. W.: The Green's functions for the rectangle obtained by the finite Fourier transformations. Proc. Amer. math. Soc. 1, 682—686 (1950).

Un calcul formel sur les développements en séries de sinus ou de cosinus des fonctions définies sur $(0, \pi)$ et de leur produit de composition permet d'obtenir très

rapidement une série représentant la fonction de Green K pour $\Delta U = 0$ et le rectangle $0 < x < \pi$, $0 < y < y_0$; on compare ensuite avec l'expression classique de K à l'aide de la fonction $\sigma(z) = \sigma(z, \pi, i y_0)$ de Weierstrass. *J. Deny.*

Consiglio, Alfonso: Su la risoluzione in termini finiti dei problemi di Villat e Dirichlet relativi alla corona circolare. Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, VI. S. 6, Mem. 7, 14 p. (1950).

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans la couronne $q < |z| < 1$, continue à la frontière, est déterminée (à une constante près) par les valeurs-limite $q_q(\theta)$ et $q_1(\theta)$ de sa partie réelle. L'A. effectue le calcul des coefficients du développement de Laurent de $f(z)$ à l'aide des coefficients des développements de Fourier, supposés convergents, de q_q et q_1 (ce qui est élémentaire et d'ailleurs bien connu), puis retrouve le résultat en utilisant la formule de Villat. *Jacques Deny.*

Bertolini, Fernando: Sopra una classe di funzioni armoniche in uno strato cilindrico. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 4, 101—129 (1950).

La classe considérée U est constituée par des fonctions $u = u(\varrho, \theta, z)$ harmoniques dans la couronne cylindrique $r < \varrho < R$ et satisfaisant à une condition simple qui entraîne une représentation en „série-intégrale de Fourier“:

$$(1) \quad u(\varrho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(h\theta + \alpha z)} [a_h(\alpha) I_h(\alpha \varrho) + b_h(\alpha) K_h(\alpha \varrho)] d\alpha$$

où $I_h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{h+2n}}{n!(m+h)!}$ et $K_h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tchx} e^{hx} dx$ sont les fonctions de

Bessel modifiées de 1^o et 2^o espèce, d'ordre h . — Dans une première partie on donne un procédé de calcul des fonctions $a_h(t)$, $b_h(\alpha)$ lorsque u satisfait à un type général de conditions-frontière englobant les trois problèmes classiques (Dirichlet, Neumann, mixte, pour lesquels le calcul est explicite), et on montre que si le problème correspondant admet une solution $u \in U$, celle-ci est donnée par le développement (1) ainsi obtenu (si donc le système linéaire qui détermine les a_h et b_h admet une solution unique, il y aura au plus une solution dans U). — Dans la 2^o partie on établit des lemmes de convergence et d'uniformité mettant en jeu des quotients de fonctions de Bessel modifiées $[I_h(\alpha \varrho)/I_h(\alpha R)]$, par exemple, jouant un rôle comparable à celui de $(\varrho/R)^h$ dans l'étude analogue, classique, pour 2 dimensions]: ces lemmes servent à déterminer (3^o partie) deux types de conditions suffisantes pour qu'une $u \in U$ soit somme de 2 fonctions, l'une harmonique dans le cylindre $\varrho < R'$ ($< R$) [à savoir la 1^o partie du 2^o membre de (1)], l'autre harmonique dans le domaine $\varrho > r'$ ($> r$). [P. 103, formule (5), lire $f_s(\theta, z)$ au lieu de $f_s(\varrho, z)$; p. 124, ligne 2, lire r' au lieu de r]. *Jacques Deny.*

Tolsted, Elmer: Limiting values of subharmonic functions. Proc. Amer. math. Soc. 1, 636—647 (1950).

Sei die Funktion $u(r, \theta)$ subharmonisch für $r < 1$ und sei $\int_{-\pi}^{\pi} |u(r, \theta)| d\theta$ beschränkt. Nach einem Satz von Littlewood [Proc. London math. Soc., II. S. 28, 383—394 (1928)] existiert eine endliche Funktion $U(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, derart, daß $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = U(\theta)$ für fast alle Werte θ . Verf. verallgemeinert diesen Satz. Sei $L_\alpha(\xi)$ eine geradlinige Strecke, die in ihrem Endpunkt $e^{i\xi}$ mit dem Radius einen festen Winkel $\alpha < \pi/2$ bildet. Dann gibt es wieder ein $U(\xi)$ derart, daß für fast alle Werte ξ $\lim u(P) = U(\xi)$, wenn hier P gegen $e^{i\xi}$ längs $L_\alpha(\xi)$ strebt. Verf. zeigt ferner durch Beispiele, daß der Grenzwert nicht mehr existiert, wenn man beliebige nichttangentielle Annäherungen an den Rand zuläßt, woraus hervorgeht, daß ein diesbezüglicher Satz von Priwaloff nicht gilt (dies. Zbl. 9, 310).

Koarlo Veikko Paatero.

Leja, F.: Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan. Ann. Soc. Polonaise Math. **23**, 230—245 (1950).

Es sei F die Begrenzung eines den Punkt ∞ enthaltenden ebenen Gebietes D_∞ und $q(z)$ eine auf F gegebene reellwertige, stetige, beschränkte Funktion; Δ sei die (nicht leere) komplementäre Punktmenge zu $D_\infty + F$. Weiter bezeichne $\zeta^{(n)}$ ein System von $n + 1$ verschiedenen, auf F gelegenen Punkten $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$, und es sei

$$V(\zeta^n) = \prod_{0 \leq i < k \leq n} |\zeta_i - \zeta_k|, \quad L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n \frac{z - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k} \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

$$V_\lambda(\zeta^{(n)}) = V(\zeta^{(n)}) \exp \left[-n \lambda \sum_{j=0}^n \varphi(\zeta_j) \right] \quad (\lambda \geq 0, \text{ reell})$$

gesetzt. Schließlich sei das System $x^{(n)}$ von $n + 1$ Punkten $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ so beschaffen, daß für dieses $V_\lambda(x^{(n)}) \equiv \sup_{\zeta^{(n)} \in F} V_\lambda(\zeta^{(n)})$ gilt. Mit Hilfe dieser $x^{(n)}$

werden die Polynome

$$\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) = L^j(z, x^{(n)}) \exp [n \lambda q(x_j^{(n)})] \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

gebildet und mit letzteren die positiven reellen Funktionen

$$F_n(z, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^n |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

aufgestellt. Nunmehr wird die Funktion $\lambda^{-1} \log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)}$ betrachtet, die in den Punkten $x^{(n)}$ gleich $q(z)$ ist. Verf. beweist, daß der Doppellimes

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)} \right\} = \Phi(z)$$

existiert und die Lösung des Dirichletschen Problems für Δ mit den Randwerten $q(z)$ darstellt.

Karl Maruhn.

Górski, Jerzy: Remarque sur le diamètre transfini des ensembles plans. Ann. Soc. Polonaise Math. **23**, 90—94 (1950).

E sei eine unendliche, abgeschlossene und beschränkte Punktmenge der Ebene. Für jedes n gibt es ein System von Punkten $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ aus E , so daß

$$\lim_{0 \leq i < k \leq n} |z_i - z_k| = \prod_{0 \leq i < k \leq n} |\eta_i - \eta_k|$$

für alle z_0, z_1, \dots, z_n aus E ist. Sei $\Delta_n^{(i)} = \prod_{k \neq i} |\eta_i - \eta_k|$, wobei $\Delta_n^{(0)} \leq \Delta_n^{(1)} \leq \dots \leq \Delta_n^{(n)}$ numeriert sei. Dann wird gezeigt: Ist E eine Summe von Kontinuen, so ist $\lim \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} = \lim \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}$, dem transfiniten Durchmesser von E . Das Beispiel der Menge, die aus der Strecke $0 \leq z < 1$ und dem Punkt $z = 3$ besteht (also einen isolierten Punkt enthält), zeigt, daß andernfalls das Ungleichheitszeichen stehen kann.

Hans Hornich.

Leitner, Roman: Sur une propriété des ensembles plans de diamètre transfini nul. Ann. Soc. Polonaise Math. **23**, 183—189 (1950).

Sei F eine unendliche, abgeschlossene und beschränkte ebene Punktmenge. Zu jedem $n \geq 2$ gibt es Punkte $\eta_1^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}$ aus F , so daß $\lim_{1 \leq i < k \leq n} |z_i - z_k| =$

$$\prod_{1 \leq i < k \leq n} |\eta_i^{(n)} - \eta_k^{(n)}| \quad (z_1, \dots, z_n \text{ Punkte aus } F). \text{ Ferner sei}$$

$$H_n(z) = \sqrt[n]{|z - \eta_1^{(n)}| \cdots |z - \eta_n^{(n)}|}.$$

Leja hat gezeigt [Ann. Soc. Polonaise Math. **14**, 116—134 (1936); dies. Zbl. **18**, 260], daß die $H_n(z)$ in der Komplementmenge von F konvergieren, wenn der transfinite Durchmesser $d(F) > 0$ ist, aber auch dann, wenn F nur einen einzigen Häufungspunkt hat [also $d(F) = 0$ ist]. In Ergänzung hierzu wird hier eine beschränkte

abgeschlossene Menge mit zwei Häufungspunkten angegeben derart, daß die $H_n(z)$ i. a. nicht konvergieren. Hans Hornich.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Vekua, N. P.: Die Hilbertsche Randwertaufgabe und Systeme von singulären Integralgleichungen im Falle von stückweise glatten Konturen. Akad. Nauk Gruzinskij SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 29—40 und russische Zusammenfassg. 40 (1949) [Grusinisch].

In dieser Note werden alle Resultate, die in der Arbeit von N. I. Muschelisvili und Verf. [Akad. Nauk Gruzinskij SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 12 (1943)] im Falle glatter Konturen gewonnen worden waren, auf den Fall stückweise glatter Konturen verallgemeinert. (Autoreferat.)

Ščelkunov, V. A.: Über eine Integralgleichung in Riemann-Stieltjes-Integralen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 137—139 (1949) [Russisch].

Untersucht wird die Integralgleichung

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int_a^b \int_{(E)} K(t, x, y) f(x, \omega) u(t, \xi) dt d\omega, \quad \xi \in (\omega),$$

wo $u(x, y)$ im Bereich $a \leq x, y \leq b$ stetig ist, $K(t, x, y)$ desgleichen im Bereich $a \leq t, x, y \leq b$ und $f(x, \omega)$ folgende mittlere additive Mengenfunktion von (ω) , einem veränderlichen Teilintervall $\alpha \leq x < \beta$ der Länge ω vom festen Grundintervall $(E) = \langle a, b \rangle$, bedeutet: $f(x, \omega) = 1/\omega$, falls $x \in (\omega)$ bzw. $f(x, \omega) = 0$,

falls $x \notin (\omega)$. Das Doppelintegral $\int_a^b \int_{(E)}$ ist ein solches im Riemann-Stieltjesschen Sinn. In der Form

$$u(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda \int_a^b K(t, x, y) u(t, x) dt,$$

die man nach Ausführung der Integration über (E) dank der Bedeutung der Funktion $f(x, \omega)$ erhält, ist diese Gleichung in der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgetreten und erstmalig von Romanovski untersucht worden [Acta Math., Uppsala 59, 99—208 (1932); dies. Zbl. 4, 397]. Verf. untersucht die ursprüngliche Form und stellt fest, daß für sie die Fredholmsche Theorie statthat, wenn man die dortigen Riemannschen Integrale durch die hier auftretenden Doppelintegrale der oben angegebenen Art ersetzt. Insbesondere gelten die grundlegenden drei Fredholmschen Sätze: über die eindeutige Lösbarkeit, falls λ kein Eigenwert des Kernes ist, die Lösbarkeit der zugehörigen homogenen Gleichung (und ebenso ihrer Adjungierten) durch m linear unabhängige Funktionen, falls λ ein Eigenwert vom Rang m ist, und die bedingte Lösbarkeit der gegebenen Gleichung in diesem Fall, wobei die gegebene Funktion $\varphi(x, y)$ dann den bekannten Orthogonalitätsbedingungen zu allen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung mit demselben Eigenwert unterworfen ist. Hieraus ergeben sich auch, und zwar in einfacherer Schreibweise in der Durchführung, die Resultate von Romanovski. Erik Svenson.

Lebedev, N. N.: Einige singuläre Integralgleichungen, die mit Integralentwicklungen der mathematischen Physik zusammenhängen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 621—624 (1949) [Russisch].

Die allgemeine Fourier-Integraldarstellung einer einer bestimmten Klasse angehörenden Funktion $f(x) = \int_0^\infty \omega(\tau) \varphi(x, \tau) d\tau = \int_a^\infty f(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi$ läßt sich nach Ergebnissen von Weyl, Carleman und Hyslop vom Standpunkt der Theorie der Integralgleichungen ansehen als integrales Analogon zum Entwicklungssatz dieser Theorie bezüglich einer singulären Integral-

gleichung $\varphi(x, \tau) = \mu(\tau) \int_a^\infty K(x, s) \varphi(s, \tau) ds$ mit dem Linienspektrum $(0, \infty)$. Für eine Reihe von speziellen Darstellungen von obigem Typus sind die zugehörigen Integralgleichungen aufgestellt worden. Verf. gibt sie an für zwei weitere, weniger bekannte Darstellungen, nämlich diejenige von Mehler-Fock

$$f(x) = \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) d\tau \int_1^\infty f(\xi) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) d\xi$$

mit den sphärischen Legendreschen Funktionen $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$ mit komplexem Index $-\frac{1}{2}+i\tau$ und die von ihm selbst eingeführte

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau \int_0^\infty f(\xi) \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi$$

mit den Macdonaldschen Zylinderfunktionen $K_{i\tau}(x)$. Es werden die Bedingungen angegeben, unter denen diese beiden Darstellungen von Funktionen Geltung haben. Die beiden zugehörigen Integralgleichungen lauten:

$$\frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{\pi} \int_1^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(s)}{x+s} ds = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), \quad \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s} \frac{K_{i\tau}(s)}{\sqrt{s}} ds = \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}.$$

Die Beweise stützen sich auf Ergebnisse der einschlägigen Literatur und bestehen im wesentlichen in der Vertauschung der Integrationsreihenfolge absolut konvergenter uneigentlicher Integrale. Vermöge dieser Resultate lassen sich die beiden zugehörigen inhomogenen linearen Integralgleichungen

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_1^\infty \frac{f(s)}{x+s} ds, \quad f(x) = g(x) + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-(x+s)}}{x+s} f(s) ds$$

mit der vorgegebenen Funktion $g(x)$ und dem der Bedingung $-\infty < \lambda \pi < 1$ genügenden Parameter λ lösen, und zwar durch Anwendung der Mehlerschen Integraltransformation

$$\int_1^\infty f(x) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) dx = F(\tau), \text{ bzw. derjenigen des Verf. } \int_0^\infty f(x) \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} dx = F(\tau), 0 \leq \tau < \infty$$

auf die Gleichungen nach der Art der Methode der Anwendung der Laplacetransformation. So ergibt sich etwa im zweiten Fall der Satz: Genügt $g(x)$ den Bedingungen: 1. $g(x)$ sei stetig und von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall (a, b) , $0 < a < b$, 2. $g(x) x^{-\frac{1}{2}} \in L(0, 1)$; $g(x) \in L(1, \infty)$, 3. $G(\tau) \tau e^{\pi\tau/2} \in L(0, \infty)$ für die Transformierte $G(\tau)$ von $g(x)$, dann existiert das durch die formalen Lösungsmethoden erhaltene Integral

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi \tau G(\tau)}{1 - \lambda \pi / \operatorname{ch} \pi \tau} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau \text{ und stellt in } (a, b) \text{ eine stetige Lösung der betreffenden}$$

Integralgleichung dar.

Erik Svenson.

Hasse, Maria: Über eine singuläre Integralgleichung 1. Art mit logarithmischer Unstetigkeit. Z. angew. Math. Mech. 30, 317—330 (1950).

Diese Arbeit — eine gekürzte Fassung einer Rostocker Dissertation — setzt sich zum Ziel, die Lösung der aus einem gemischten räumlichen Randwertproblem der Potentialtheorie herrührenden Integralgleichung

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f(t) \cdot H(x-t) dt = g(x)$$

$$\text{mit dem Kern } H(x-t) = \int_0^\infty \frac{I_1(iq)}{iq I_1'} \cos q |x-t| dq = -\ln |x-t| + K(x-t)$$

auf numerischem Wege mittels eines trigonometrischen Interpolationspolynoms für die spezielle Funktion $g(x) = x^2$ zu gewinnen. Zuerst wird die in der Literatur schon mehrfach behandelte Integralgleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f(t) \{ -\ln |x-t| \} dt = \bar{g}(x)$$

mit Hilfe eines Interpolationsansatzes gelöst, der anschließend auf die Integralgleichung (1) übertragen wird. Zur Nachprüfung wird im zweiten Teil der Arbeit die Integralgleichung (1) mit Hilfe der differenzierten Integralgleichung

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 f(t) \left\{ \frac{1}{(t-x)} + \frac{\partial}{\partial x} K(x-t) \right\} dt = g'(x)$$

und eines anderen Interpolationspolynoms gelöst und schließlich im dritten Teil aus der berechneten allgemeinen Lösung von (2) durch eine Zusatzbedingung diejenige ausgesondert, welche auch (1) befriedigt.

Viktor Garten.

Schwarz, L.: Methoden der Theorie der Integraltransformationen. Z. angew. Math. Mech. 30, 285—286 (1950).

Si svolgono alcune considerazioni relative all'equazione integrale singolare

$$g(y) = \int_a^b K(y, x) f(x) dx,$$

$K(y, x) = \alpha (y-x)^{-1} + \ln |y-x| \cdot L(y, x) + M(y, x)$, con $L(y, x)$, $M(y, x)$ funzioni intere.

Carlo Miranda.

Humbert, Pierre: Fonctions de Bessel et calcul symbolique. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I 64, 55—61 (1950).

Si determinano la trasformata di Laplace-Carson (L.-C.) della funzione di Bessel $I_t(x)$, ove t è la variabile ed x è parametro, e la trasformata di L.-C. a due variabili della funzione $x^{y/2} I_y(2\sqrt{x})$. — Considerate inoltre le funzioni di Bessel come immagini, introducendo il loro indice come variabile simbolica, si determina la seguente corrispondenza di L.-C. a due variabili:

$$p^{1/2q+1} K_{1/q}(\sqrt{p}) \subset \subset \frac{e^{-1/4x}}{2x} J_0(2\sqrt{y \log 2x}), \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} [I_{-n}(x) - I_n(x)].$$

Carlo Miranda.

● McLachlan, N. W. et Pierre Humbert: Formulaire pour le calcul symbolique. 2^e éd. (Mém. Sci. math. Nr. 100.) Paris: Gauthier-Villars 1950. 67 p. 350 frs.

Eine im wesentlichen unveränderte Neuauflage der 1941 erschienenen Formelsammlung (dies. Zbl. 25, 183). Sie enthält die mit dem Transformationsparameter

multiplizierten Laplace-Transformierten $p L[f] = p \int_0^\infty e^{-px} f(t) dt$ verschiedener

Klassen von Funktionen $f(t)$. Dabei werden ungefähr 40 Abbildungen von Operationen im Bereiche der $f(t)$ und mehr als 700 Transformierte der $f(t)$ selbst angegeben. Ungefähr 40 Angaben der ersten Auflage sind berichtigt worden. Darunter etwa 5 leider falsch. Die Literaturangabe ist die alte, ungenügende geblieben. Ist in der ersten Auflage besonders die Angabe des Standardwerks von Doetsch über Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (1937, dies. Zbl. 18, 129) vermißt worden, so kann in der Neuauflage dasselbe von den Büchern von Carslaw und Jaeger (dies. Zbl. 30, 393), Churchill (Modern operational methods in engineering New York 1948), Ghizzetti, Wagner (dies. Zbl. 23, 395), Widder und insbesondere von den von Doetsch 1947 gegebenen Tabellen zur Laplace-Transformation (dies. Zbl. 29, 45) gesagt werden. Bezüglich der ungefähr 40 zweidimensionalen Transformationsformeln soll hier nur zwecks Orientierung bemerkt werden, daß sie nunmehr von den fast 700 recht übertroffen wurden, die in Voelker-Doetsch: Die zweidimensionale Laplace-Transformation (Birkhäuser, Basel 1950) zu finden sind.

Tibor Szentmártony.

● McLachlan, N. W., P. Humbert et L. Poli: Supplément au formulaire pour le calcul symbolique. (Mém. Sci. math., Nr. 113.) Paris: Gauthier-Villars 1950. 62 p. 450 frs.

Das Heft stellt eine Ergänzung zur vorangehend besprochenen Formelsammlung der mit dem Transformationsparameter multiplizierten Laplace-Transfor-

mierten von Klassen von Funktionen $f(t)$ dar. Es enthält fast 40 neue Abbildungen von Operationen im Bereiche der $f(t)$ und mehr als 400 neue Korrespondenzen zwischen den Funktionen. Darunter jenen, welche den neuen Klassen der Eulerischen Funktionen, der Sinusfunktionen höherer Ordnung, ferner jenen Funktionen entsprechen, welche aus den letzteren nach Ersetzung des Summenzeichens durch ein Integralzeichen entstehen sowie der Mathieschen Funktionen. Wie weit die angegebenen Formeln durch rein formale Rechnung gewonnen wurden, läßt sich nicht entscheiden. Vom Gesichtspunkte der Anwendung bei der symbolischen oder Operatorenrechnung muß aber sowohl der Formelsammlung, als auch deren vorliegende Ergänzung gegenüber festgestellt werden, daß es vorteilhafter gewesen wäre, die Korrespondenzen der Funktionen — gegenüber jenen der Operationen — nicht nach Klassen der zu transformierenden, sondern nach jenen der Transformierten zu ordnen.

Tibor Szentmártony.

Pol, Balth. van der and H. Bremmer: Modern operational calculus based on the two sided Laplace integral. I. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 51, 1005—1012 (1948).

An verschiedenen Beispielen werden die Abweichungen und besonders die formalen Vereinfachungen erläutert, die man erhält, wenn man der Operatorenrechnung voll vornherein anstatt der gewöhnlichen die zweiseitige Laplacetransformation $f(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} F(t) dt$ zugrunde legt; zur einseitigen kehrt man durch Beifügung des Faktors $U(t) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sg} t)$ zurück. An Stelle der Konvergenzhalbebene tritt der Konvergenzstreifen; dieser muß beim Rückschluß auf die Oberfunktion ausdrücklich angegeben werden, da verschiedene Oberfunktionen in verschiedenen Streifen gleiches Bild haben können. Hingewiesen wird ferner auf den „Verschiebungssatz“, auf Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie, und auf den Faltungssatz, mit dessen Hilfe der Ergänzungssatz für die Γ -Funktion aufs neue bewiesen wird. Als Beispiel für die Erweiterung des Unterbereichs gegenüber der einseitigen Laplacetransformation wird die Unterfunktion von $e^{-e^{-t}} \sin(e^{-t})$ genannt; sie hat unendlich viele Nullstellen auf der reellen p -Achse, was bei der einseitigen Laplace-Transformation nicht möglich wäre. — Im Beispiel (4b) ist im Argument der Gaußschen Ψ -Funktion p durch $p+1$ zu ersetzen.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Pol, Balth. van der and H. Bremmer: Modern operational calculus based on the two-sided Laplace integral. II. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 51, 1125—1136 (1948).

Die Betrachtungen dieses Teiles beginnen mit der Einführung der sogenannten Diracschen δ -Funktion im Oberbereich, was darauf hinausläuft, ein Laplace-Stieltjes-Integral der Form

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} h(t) dU(t)$ fälschlich — oder also: symbolisch — wie

ein gewöhnliches Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} h(t) \delta(t) dt$ zu schreiben (das, in der klassischen

Weise als uneigentliches Integral aufgefaßt, natürlich Null wäre). Diese Rechnungsweise wird zunächst auf lineare (homogene und nichthomogene) Differentialgleichungen mit konstanten Beiwerten der linken Seite angewandt, die für $t \geq 0$ betrachtet werden, während die Anfangswerte für $t = 0$ vorgeschrieben sind. Diese Aufgaben lassen sich allerdings ebenso bequem und durchsichtig mit der gewöhnlichen Laplacetransformation behandeln, wenn man nur beim Übergang zum Unterbereich für eine Ableitung deren Anfangswert bei $t = 0$ gebührend in Rechnung zieht, wie es bei Doetsch (vgl. z. B. Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 321ff., dies. Zbl. 18, 129) und Wagner (vgl. z. B. Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1940, S. 53 Regel (III); dies. Zbl. 23, 395) geschieht. Hier und bei den folgenden Anwendungen

auf die Transformierten Legendrescher Funktionen wären die skizzenhaften Ausführungen durch eine nähere Begründung des unvermittelt eingeführten Rechnens mit den „Ableitungen“ der δ -Funktion zu ergänzen. Weitere (hiervon unabhängige) Anwendungen fußen auf der Herleitung des Bildes von $h(e^t)$ aus dem von $h(t)$ vermöge Umgestaltung von Doppelintegralen. Es entsteht ein Tripel von Transformationsformeln, aus denen verschiedene spezielle Beziehungen zwischen hypergeometrischen, Kugel- und Zylinderfunktionen gewonnen werden. Erwähnt sei noch die Anwendung auf eine gewisse Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung, auf Integrale vom Barneschen Typ für hypergeometrische Funktionen, und die Differentiation Legendrescher Funktionen nach einem Parameter (der „Ordnung“). Zum Schluß einige Funktionalidentitäten, in denen willkürliche Funktionen und deren Bilder auftreten, sowie Anwendung auf Launtsche Reihen, aufgefaßt als zweiseitige Laplacetransformierte. *Hermann Schmidt* (Braunschweig).

Friedman, Morris D.: Determination of eigenvalues using a generalized Laplace transform. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **21**, 1333—1337 (1950).

Die Differentialgleichung $[P(x) U'(x)]' - [Q(x) - \lambda R(x)] U(x) = 0$ mit gewissen Randbedingungen für die Eigenfunktion $U(x)$, wobei P/R , P'/R und Q/R Polynome seien, wird mit e^{-sx} multipliziert und über x längs eines geeigneten, den Randbedingungen angepaßten Integrationsweges integriert und dann partielle Integration unter Ausnutzung der Randbedingungen angewendet. Die Bedingungen der Regularität von U und die Durchrechnung der Methode führen in vielen Fällen zu Gleichungen für die Eigenwerte und zu Orthogonalitätsrelationen, wie am Beispiel der hypergeometrischen Gleichung, der konfluenten hypergeometrischen Gleichung, der Hermiteischen, Laguerreschen und Besselschen Gleichung gezeigt wird. *Lothar Collatz*.

Cooper, J. L. B.: The application of multiple Fourier transforms to the solution of partial differential equations. *Quart. J. Math. (Oxford II. S.)* **1**, 122—135 (1950).

L'A. démontre d'abord un résultat classique de la théorie des intégrales multiples de Fourier: si $f(x)$ est continue et sommable dans R^k , on a:

$$(1) \quad f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{-\delta|u|} du \int f(y) e^{iu \cdot (y-x)} dy$$

où $|u| = (u_1^2 + \dots + u_k^2)^{\frac{1}{2}}$, $u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_k v_k$. Après quoi, pour illustrer l'emploi de la transformation de Fourier dans la théorie des équations aux dérivées partielles, il traite entièrement le problème de Cauchy pour l'équation des ondes $\Delta f - \partial^2 f / \partial t^2 = 0$, $f = f(x, t)$, avec données-frontière $f(x, 0) = \psi(x)$, $f_t(x, 0) = \varphi(x)$. Le point de départ consiste à observer que la fonction de t : $F_D(u, t) = \int_D f(x, t) e^{iu \cdot x} dx$ doit satisfaire à une équation différentielle ordinaire;

à l'aide de (1) on obtient la solution cherchée sous la forme connue, moyennant les hypothèses usuelles de régularité pour ψ et φ (le problème est traité principalement pour k impair, l'autre cas s'y ramenant grâce à la méthode de „descente“ de Hadamard). — L'A. établit enfin une propriété „permanente“ de la solution $f(x, t)$: celle d'avoir des dérivées (par rapport aux x_k) d'ordre s de carré sommable sur tout compact de R^k . Cela le conduit à quelques remarques sur les „solutions généralisées“, notion en relation très étroite avec la théorie de L. Schwartz (Théorie des distributions, *Actual. sci. industr.* no. 1091 et 1122; ce *Zbl.* **37**, 73; nous renvoyons également à cet ouvrage pour les questions concernant la transformation de Fourier et son utilisation dans les équations aux dérivées partielles). *Jacques Deny*.

Guinand, A. P.: A class of Fourier kernels. *Quart. J. Math. (Oxford II. S.)* **1**, 191—193 (1950).

Détermination explicite de certaines fonctions élémentaires $K(x)$ qui, de même que $(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \cos x$, vérifient $\mathfrak{K}(s) \mathfrak{K}(1-s) = 1$, où $\mathfrak{K}(s) = \int_0^\infty K(x) x^{s-1} dx$ s'obtient par la transformation de Mellin. *Jacques Deny*.

Phillips, R. S.: On Fourier-Stieltjes integrals. Trans. Amer. math. Soc. 69, 312—323 (1950).

Une fonction $\Phi(\tau)$ à valeurs complexes, définie sur $-\infty, +\infty$ satisfait à la condition (A), s'il existe une constance C telle que $|\sum a_n \Phi(\tau_n)| \leq C \sup_{-\infty < s < +\infty} |\sum a_n \exp(i\tau_n s)|$ pour tous les ensembles finis de nombres réels τ_n et de nombres complexes a_n . Soit C^* le plus petit des nombres C . L'A. établit l'énoncé suivant, qui généralise un résultat de Bochner [Bull. Amer. math. Soc. 40, 271—276 (1934); ce Zbl. 9, 247]: „Si $\Phi(\tau)$ est mesurable et vérifie (A), il existe une fonction $y(s)$ et une seule, à variation bornée, continue à droite et vérifiant $y(-\infty) = 0$, telle que l'on ait presque partout

$$(1) \quad \Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\tau s) dy(s)$$

et $V(y) \leq C^* [V(y) = \text{variation de } y]$. Si $\Phi(\tau)$ est continue, (1) est vraie partout et $V(y) = C^{**}$. — Le principe de la démonstration est d'obtenir (1) comme expression de la transposée de la transformation de Fourier appliquée à l'espace X_0 des fonctions $f(s)$ continues de $-\infty$ à $+\infty$ et tendant vers 0 quand $|s| \rightarrow \infty$. Pour cela, si M est le sous-espace de X_0 , dense sur X_0 , des

fonctions $f(s)$ continûment dérivables par morceaux, on pose $h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp(-i\tau s) ds$

[$h(\tau)$ est bornée, continue, et absolument intégrable de $-\infty$ à $+\infty$] puis $L_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \Phi(\tau) d\tau$.

L_0 est une fonctionnelle linéaire continue sur M . On prouve que $\|L_0\| \leq C^*$, en utilisant les fonctionnelles linéaires L définies sur l'espace X des fonctions presque-périodiques, qui sont en correspondance biunivoque avec les fonctions $\Phi(\tau)$ vérifiant (A), avec $\|L\| = C$. L_0 admet

un prolongement unique à X_0 entier, on en déduit que pour $f \in M$, $L_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) dy(s)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) h(\tau) d\tau$ d'où résulte aisément (1). — Dans un 2° paragraphe, l'A. étend le théorème

au cas où $\Phi(\tau)$ prend ses valeurs dans un espace de Banach séparable Y , et où $\Phi(\tau)$ satisfait outre (A) à la condition C_w (resp. C_s): l'ensemble des éléments

$$\sum a_n \Phi(\tau_n) / \sup_{-\infty < s < +\infty} |\sum a_n \exp(i\tau_n s)|$$

pour tous les ensembles finis $\{\tau_n\}$, $\{a_n\}$ est faiblement (resp. fortement) relativement compact en Y . — On désigne par $V_w(Y)$ (resp. $V_s(Y)$) l'ensemble des fonctions $y(s)$ à valeurs dans Y telles que $g[y(s)]$ soit à variation bornée, continue à droite et s'annule pour $s = -\infty$, pour tout $g \in \bar{Y}$, et que l'ensemble des $\sum [y(s_i) - y(s'_i)]$ pour tous les ensembles finis d'intervalles disjoints (s_i, s'_i) soit faiblement (resp. fortement) compact. Pour $y \in V(Y)$, la norme sera $\|y\| = \sup V \{g[y(s)]\} [g \in Y, \|g\| = 1]$. Le théorème s'énonce alors: Si $\Phi(\tau)$ est une fonction mesurable (cf. E. Hille, Amer. math. Soc. Colloq. Publ. Nr. 31, New York 1948; ce Zbl. 33, 65) définie de $-\infty$ à $+\infty$, à valeurs dans Y , satisfaisant (A) et C_w (resp. C_s), il existe une fonction $y \in V_w(Y)$ [resp. $V_s(Y)$] et une seule telle que (1) ait lieu presque partout et $\|y\| \leq C^*$. Si $\Phi(\tau)$ est faiblement continue, (1) a lieu partout et $\|y\| = C^*$. André Revuz.

Carleman, T.: Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22. 6. 1947), 45—53 (1949).

Da eine Fourier-Transformierte $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izy} f(y) dy$ als Differenz der

Randwerte einer für $\Im z > 0$ und einer für $\Im z < 0$ analytischen Funktion dargestellt werden kann, wird zwecks Verallgemeinerung des Fourierschen Integraltheorems an Stelle einer Funktion einer reellen Variablen ein Paar von Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ betrachtet, die für $\Im z > 0$ bzw. $\Im z < 0$ analytisch sind und auf den vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen für $|z| \rightarrow \infty$ wie $|z|^{-\alpha}$, für $|z| \rightarrow 0$ wie $|z|^{-\beta}$ wachsen können ($\alpha, \beta \geq 0$). Die Integrale

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-izy} f_1(y) dy, \quad H(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-izy} f_2(y) dy,$$

erstreckt über einen Strahl der oberen bzw. unteren Halbebene, konvergieren in Halbebenen der z -Ebene, wenn $\beta < 1$. Für $\beta \geq 1$ konvergieren statt dessen die

Ableitungen

$$G^{(m)}(z) = \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-izy} y^m f_1(y) dy, \quad H^{(m)}(z) = \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-izy} y^m f_2(y) dy$$

mit $0 \leq \beta - m < 1$, die G und H bis auf ein Polynom bestimmen. Durch Drehung des Integrationsweges kann man G bzw. $G^{(m)}$ in die längs der positiv reellen Achse und H bzw. $H^{(m)}$ in die längs der negativ reellen Achse aufgeschnittene z -Ebene analytisch fortsetzen. Als verallgemeinerte Fourier-Transformierte des Paares f_1, f_2 wird dann das Paar

$$g_1(z) = H(z) - G(z) \text{ für } \Im z > 0, \quad g_2(z) = H(z) - G(z) \text{ für } \Im z < 0$$

definiert, symbolisch: $g \sim S(f)$. Wird nun mit $T(g)$ diejenige Transformation bezeichnet, die das Paar g_1, g_2 in das Paar $g_2(\bar{z}), g_1(\bar{z})$ überführt, so läßt sich das verallgemeinerte Fouriersche Integraltheorem so ausdrücken: $TSTS(f) \equiv f$, wobei \equiv bedeutet, daß die beiden Seiten bis auf ein Polynom übereinstimmen. — Als

Anwendung wird die Integralgleichung $\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = 0$ behandelt, wo $K \in L(-\infty, \infty)$ und φ als beschränkt vorausgesetzt wird. Wenn

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} K(x) dx \neq 0$$

für alle reellen α ist, so muß φ fast überall 0 sein. Wenn dagegen $g(\alpha)$ (eventuell unendlich viele) reelle Nullstellen hat (mit endlichem Konvergenzexponenten), so ist die Menge der Lösungen identisch mit der Menge der Grenzfunktionen der Folgen von trigonometrischen Polynomen der Form $\sum_{\nu=1}^N a_{\nu} e^{i\alpha_{\nu} x}$. (Der vorliegende Vortrag stellt einen Auszug aus dem Buch des Verf. dar: *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala 1944, insbesondere S. 36—52, 74—78, 111—116. Anm. d. Ref.)

Gustav Doetsch.

Schwartz, Laurent: *Théorie des distributions et transformation de Fourier*. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22.6.1947), 1—8 (1949).

Verkürzte Wiedergabe der Arbeiten des Verf. in Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., II. S. 21, 57—74 (1945) und 23, 7—24 (1948). Siehe das zusammenfassende Referat über beide Arbeiten in dies. Zbl. 30, 126. Gustav Doetsch.

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: *A miniature theory in illustration of the convolution transform*. Amer. math. Monthly 57, 667—674 (1950).

Die von den Verff. in früheren Arbeiten (vgl. insbesondere dies. Zbl. 35, 192, 193) entwickelte Theorie der Transformationen vom Faltungstyp

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t) \varphi(t) dt$$

wird durch ein besonders einfaches Beispiel illustriert, nämlich $G(t) = 0$ für $t > 0$, $G(t) = e^t$ für $t \leq 0$, also $f(x) = \int_x^{\infty} e^{x-t} \varphi(t) dt$. Die Einfachheit der in diesem Fall vorliegenden Verhältnisse resultiert aus dem Umstand, daß die Umkehrung der Transformation durch einen linearen Differentialoperator erster Ordnung bewerkstelligt wird, nämlich $\varphi(x) = f(x) - f'(x)$, während im allgemeinen der Differentialoperator von unendlicher Ordnung ist (so z. B. im Fall der Laplace- und der Stieltjes-Transformation). Die Darstellungstheorie, die danach fragt, welche Funktionen $f(x)$ z. B. durch beschränkte oder positive oder zur Klasse L^p ($p \geq 1$) gehörige $\varphi(t)$ dargestellt werden können, läßt sich in diesem Spezialfall unabhängig von der allgemeinen Theorie ganz elementar entwickeln. Gustav Doetsch.

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: Generalized inversion formulas for convolution transforms. II. Duke math. J. 17, 391—402 (1950).

Ihre früheren Untersuchungen (zuletzt dies. Zbl. 35, 192) fortsetzend, geben

Verff. I. Umkehrformeln von Faltungsumwandlungen $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) e^{ct} d\lambda(t)$

bzw. $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \varphi(t) dt$ und II. notwendige und hinreichende Bedingungen für eine solche Darstellbarkeit von Funktionen $f(x)$ an. Und zwar bei nicht-abnehmendem und an den Sprungstellen mit $\frac{1}{2} [\lambda(t+) + \lambda(t-)]$ normiertem

$\alpha(t)$, ferner beschränktem $\|\varphi\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p dt \right]^{1/p}$ sowie $G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds$

mit der nun spezialisierten Funktion $E(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - s^2 a_k^2)$ bei reellen $a_k/k \rightarrow 1$.

Die Hauptrolle spielt dabei die — bis auf die Strecke $[-i\pi, i\pi]$ analytische — Kern-

funktion $K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k)}(0) z^{-k-1}$ bzw. das in $z = x + iy$ entlang einer

$[-i\pi, i\pi]$ einmal positiv umschließenden, mit $0 < \varrho < 1$ in $|y| < \pi/\varrho$ verlaufenden rektifizierbaren Kurve C erstreckte Integral $J(f; u, \varrho) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(u + \varrho z) K(z) dz$.

Unter I. wird nämlich gezeigt, daß, wenn c in $(-\infty, -a_1)$ oder $[a_1, +\infty)$ fällt, die auf die Endpunkte a, b dieses Intervalls bezogene Differenz

$\alpha(b) - \alpha(a) = \lim_{\varrho \rightarrow 1-} \int_a^b e^{-cu} J(f; u, \varrho) du$ bzw. $\varphi(t) = \lim_{\varrho \rightarrow 1-} J(f; t, \varrho)$ wird. — Unter

II. ergeben sich schließlich für die — mit $c = 0$ genommene — erste bzw. für die zweite Darstellbarkeit folgende notwendige und hinreichende Bedingungen. 1. Die

Regularität von $f(z)$ innerhalb $|y| < \pi$, 2. $f(z) = o(e^{a_1|z|})$ bei $x \rightarrow \pm\infty$ gleichmäßig in jedem Teilstreifen $|y| \leq \pi(1-\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, 3. $J(f; x, \varrho) \geq 0$ bzw.

$|J(f; x, \varrho)| \leq M$ mit einer von ϱ unabhängigen Konstante M . — Für $a_k = (2k-1)/2$, $f(x) = F(e^x) e^{x/2}$ und $\varphi(t) = \pi \Phi(e^t) e^{t/2}$ ergibt sich als Sonderfall die Stieltjessche

Umkehrung $\Phi(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (2\pi i)^{-1} [F(-t-i\varepsilon)] - F(-t+i\varepsilon)]$ von $F(x)$

$= \int_0^{\infty} \Phi(t) (x+t)^{-1} dt$. Und für die Darstellbarkeit $f(x) = \int_0^{\infty} (x+t)^{-1} d\alpha(t)$ er-

geben sich die Bedingungen: 1. $f(z)$ regulär für $|\arg z| < \pi$, 2. $f(z) = o(1)$ für $|z| \rightarrow \infty$ und $= o(|z|^{-1})$ für $|z| \rightarrow 0$ gleichmäßig in jedem $|\arg z| \leq \pi(1-\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$, 3. $e^{i\theta/2} f(re^{i\theta}) + e^{-i\theta/2} f(re^{-i\theta}) \geq 0$ für $0 < r < \infty$, $|\theta| < \pi$.

Tibor Szentmártony.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Bojanić, Ranko: Une propriété caractéristique des courbes du second degré. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 105—110 und französ. Zusammenfassg. 111 (1949) [Serbisch].

En partant d'un théorème démontré par J. Karamata (ce Zbl. 39, 289), l'A. montre que le système d'équations fonctionnelles (*) $q(\xi) = \frac{1}{2} (q(x) + q(y))$, $F(y) - F(x) = (y-x)F'(\xi)$ est caractéristique pour les sections coniques, c'est-à-dire que seules les courbes de second degré dont l'équation est donnée par $y = F(x)$, satisfont à (*), la fonction $q(t)$ étant nécessairement définie par $q'(t) = (At^2 + Bt + C)$ (A, B, C constantes arbitraires). Il montre que les équations (*) reposent sur la propriété suivante des diamètres conjugués: Soit \widehat{AB} un arc d'une section conique dont le centre S est supposé à distance finie, et soit M le point dont la tangente est parallèle à la corde AB . On a dans ce cas: surface SBM = surface SAM . En désignant par Q le point d'intersection d'une droite quelconque passant par S avec la section conique, on aura par conséquent: surface SQM = $\frac{1}{2}$ {surface SQA + surface SQB }. C'est cette propriété qui se trouve exprimée analytiquement par les équations (*). (Autoreferat.)

Thielman, H. P.: On a pair of functional equations. Amer. math. Monthly 57, 544—547 (1950).

Es werden die stetigen, reellen Lösungen des folgenden Funktionalgleichungssystems gesucht:

$$f(xy) = g(x)^{p(y)} h(y)^{q(x)}, \quad r(xy) = p(x) q(y) \quad (x > 0).$$

Verf. konstatiert, daß alle reellen, stetigen Lösungen die folgende Form besitzen:

$$p(x) = c_1 x^\beta, \quad q(x) = c_2 x^\beta, \quad r(x) = c_1 c_2 x^\beta, \quad g(x) = (k_1 x^\alpha)^{x^{\beta/c_1}}$$

$$h(x) = (k_2 x^\alpha)^{x^{\beta/c_2}}, \quad f(x) = (k_1 k_2 x^\alpha)^{x^\beta} \quad (c_i \neq 0, k_i > 0).$$

Es werden auch spezielle Fälle des betrachteten Systems gelöst. *Stefan Fenýő.*

Aczél, J.: Über einparametrische Transformationen. Publ. math., Debrecen 1, 243—247 (1950).

Lösungsfunktionen $T(x_1, x_2)$ und $O(y_1, y_2)$ der Funktionalgleichung

$$T[T(x, u_1), u_2] = T[x, O(u_1, u_2)]$$

werden mit (1) $T(x_1, x_2) = f_{-1}[f(x_1) + g(x_2)]$ und (2) $O(y_1, y_2) = g_{-1}[g(y_1) + g(y_2)]$ angegeben, wobei f und g reelle, stetige und streng monotone Funktionen sind, die zur Einsetzung in die rechte Seite von (1) und (2) noch weiteren Bedingungen genügen müssen. — $T(x, u)$ wird als einparametrische Transformationsschaar mit gewissen Eigenschaften aufgefaßt, wobei x transformiert wird und u der Parameter ist.

Hans Töpfer.

Bourgin, D. G.: Multiplicative transformations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 564—570 (1950).

Soit S un espace compact, $C(S)$ l'espace de Banach des fonctions numériques continues dans S . L'A. détermine les fonctions numériques continues M sur $C(S)$, telles que $M(xy) = M(x)M(y)$. Par passage aux logarithmes, on voit que pour les fonctions x dont le minimum dans S est > 0 , on a $M(x) = \exp \int_S \log x(t) d\mu(t)$,

où μ est une mesure sur S ; l'A. montre que μ est positive et a un support dénombrable (fermé par définition): cette propriété se voit en montrant que dans le cas contraire une suite de fonctions x_n dont chacune est nulle dans un ensemble de mesure > 0 pourrait tendre uniformément vers une fonction x pour laquelle $\log x(t)$ est intégrable. L'A. étudie d'autre part les transformations T de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$ qui sont multiplicatives; il montre que cette dernière propriété est entraînée par des conditions en apparence moins restrictives sur T (p. 565, ligne 6, la seconde parenthèse de la formule est mal placée, les parenthèses étant d'ailleurs unitiles dans cette formule; ligne 7, le premier des trois membres de l'inégalité est inutile).

Jean Dieudonné.

● **Altwegg, Martin:** Ein Modell des Hilbertschen Raumes. (Diss.) Zürich: Orell Füssli A. G. 1948. 35 S.

Verf. bezeichnet es als Ziel seiner Dissertation, auf dem kürzesten Weg den Hilbertschen Raum der quadratisch (Lebesgue-) integrierbaren Funktionen zu konstruieren oder vielmehr den Riesz-Fischerschen Satz zu beweisen. Der für seinen Weg nötige Aufbau der klassischen Lebesgueschen (Maß- und) Integraltheorie wird in enger Anlehnung an eine bekannte Arbeit von F. Riesz [Acta math. 42, 191—205 (1920)] entwickelt.

Otto Haupt.

Al'tman, M. S.: Über Basen im Hilbertschen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 483—485 (1949) [Russisch].

B sei eine Basis im Hilbertraum H , K die Menge der zu B gehörigen Koeffizientenfolgen. B heißt eine Besselsche, Hilbertsche, Rieszsche Basis, wenn $K \subseteq l^2$, $K \supseteq l^2$, $K = l^2$ ist. Verf. konstruiert eine Basis in L^2 , die weder eine Besselsche noch eine Hilbertsche ist. Er stützt sich dabei auf Ergebnisse von K. I. Babenko (dies. Zbl. 33, 186; vgl. auch dies. Zbl. 39, 122). Weitere Literatur: Bari, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 54, No. 5 (1946), Al'tman, dies. Zbl. 32, 356.

Karl Zeller.

Fuglede, Bent: *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.* Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 101—109 (1950) [Dänisch].

Bref exposé des résultats classiques concernant la décomposition spectrale des transformations linéaires autoadjointes, unitaires et normales de l'espace de Hilbert.
János Horváth.

Lehto, Olli: *On Hilbert spaces with a kernel function.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 74, 12 S. (1950).

L'A. reprend une étude de Aronszajn [Proc. Cambridge philos. Soc. 39, 133—153 (1943)] sur le noyau de Bergman. Supposons que pour un espace hilbertien H de fonctions f complexes dans un domaine G , on ait $\|f(P)\| \leq M_P \|f\|$ (M_P indépendant de f). Alors H est séparable et si q_v est un système orthonormal complet, $\sum q_v|^2$ est fini et $\sum q_v(P) q_v(Q)$ est le noyau reproduisant $K_P(Q)$ c'est à dire que $f(P) = (f(Q), K_P(Q))$. De plus $\sum |q_v|^2$ est borné sur tout compact de G . Deux applications sont données, à une équation autoadjointe aux dérivées partielles de type elliptique et à un champ de vecteurs analytique sur une surface de Riemann.

Marcel Brelot.

Schatten, Robert: „Closing-up“ of sequence spaces. Amer. math. Monthly 57, 603—616 (1950).

Soit L l'espace des suites $u = (u_n)$ de nombres réels dont un nombre fini de termes seulement sont $\neq 0$, L_n le sous-espace de L formé des suites u telles que $u_m = 0$ pour $m > n$, de sorte que L est réunion des L_n . Une norme $\Phi(u)$ sur L est dite symétrique si elle est invariante pour toute permutation des termes de la suite u ; sa restriction Φ_n à L_n est une norme symétrique sur L_n ; si on identifie canoniquement le dual de L_n à L_n en associant à toute forme linéaire $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n u_i v_i$ sur L_n le point (v_i) de L_n , la norme ψ_n sur le dual de L_n (définie comme d'ordinaire à partir de la norme Φ_n sur L_n) est symétrique, et ψ_n est une restriction de ψ_{n+1} à L_n . L'A. montre que si on munit L d'une norme symétrique Φ , le dual de L peut être identifié à l'espace des suites $v = (v_n)$ de nombres réels telles que $\sup_n \psi_n(v_1, \dots, v_n) < +\infty$, cette borne supérieure n'étant autre que la norme dans le dual de L .

Jean Dieudonné.

Grothendieck, Alexandre: Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces (LF) . C. r. Acad. Sci., Paris 231, 940—941 (1950).

L'A. esquisse d'abord la démonstration du théorème suivant, qui généralise des résultats d'Eberlein et Krein: pour que l'enveloppe convexe fermée C d'une partie A d'un espace localement convexe séparé E soit compacte, il faut et il suffit que A soit relativement semi-compact (c'est-à-dire que toute suite de points de A ait une valeur d'adhérence dans E) et que C soit complète pour la topologie $\tau(E, E')$ (topologie la plus fine sur E qui donne le même dual E' que la topologie initiale de E). Il annonce d'autre part qu'il a obtenue un contre-exemple qui permet de répondre négativement à 6 des problèmes posés par L. Schwartz et le Réf. (ce Zbl. 35, 355) concernant les espaces (LF) .

Jean Dieudonné.

Giorgi, Ennio de: Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 238—242 (1950).

Σ est l'ensemble des suites $x = \{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Pour tout x , on définit $\pi_n(x) = \{\xi_k\}$ par $\xi_k = x_k$ si $k \leq n$ et $\xi_k = 0$ si $k > n$. Si X est un ensemble inclus en Σ , $\pi_n(X)$ est l'ensemble des $\pi_n(x)$ quand x décrit X . On suppose qu'une distance $|x - y|$ est définie sur Σ , de telle sorte que I. $|x - y| \geq |\pi_n(x) - \pi_n(y)|$. II. $\lim_n |\pi_n(x) - \pi_n(y)| = |x - y|$. III. Si X est un ensemble borné inclus en Σ , et $\{X_k\}$ une suite d'ensembles inclus en X , il existe $y \in \Sigma$ tel que pour tout n ,

$\pi_n(y)$ soit „élément de compacité“ de $\{\pi_n X_k\}$ [c-à-d. pour tout voisinage V de $\pi_n(y)$, il existe une suite k_i telle que $V \cap \pi_n(X_{k_i}) \neq \emptyset$]. — Pour tout X borné, on pose $\varphi(n, X) = \sup |x_1 - x_2|$ pour tous les couples x_1, x_2 ; $x_1 \in X, x_2 \in X$, tels que $|\pi_n(x_1) - \pi_n(x_2)| < 1/n$ et $\varphi(x) = \lim_n \varphi(n, x)$. L'A. établit le théorème: La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble borné X soit compact est $\varphi(x) = 0$.

André Revuz.

Silov, G. E.: Über einen Satz von I. M. Gelfand und seine Verallgemeinerungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 641—644 (1950) [Russisch].

L'A. démontre le théorème suivant: soit R une algèbre normée avec unité et, pour un élément inversible x de R , posons $\alpha_n = \|\pi_n\|$; supposons que pour un entier $k > 0$ on ait les conditions

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot r^n = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot r^n = 0;$$

enfin, supposons que x et x^{-1} engendrent R . Alors tout idéal maximal M de R contient au plus $k-1$ idéaux primaires distincts I_1, \dots, I_{k-1} ; I_k est du reste engendré par l'élément $(x - x(M)e)^k$. Ce résultat (ou un résultat équivalent) est dû à Gelfand qui l'a démontré en 1941; l'A. donne ici une démonstration directe et très courte qui, comme du reste celle de Gelfand, utilise essentiellement le théorème de Phragmén-Lindelöf, et montre comment on peut en déduire des résultats de Hille et Stone sur les éléments nilpotents d'une algèbre normée.

Roger Godement.

Silov, G. E.: Beschreibung einer Klasse von normierten Funktionenringen. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 291—310 (1950) [Russisch].

Soit R une algèbre normée complète avec unité, possédant un générateur, et réalisée par des fonctions continues sur un segment de droite $[a, b] = I$. On appelle norme d'une $x \in R$ en un point $s \in I$ le nombre $\|x\|_s$, borne inférieure des normes (dans R) des fonctions $y \in R$ qui coïncident avec x au voisinage de s ; on dit que R est de type C si, pour toute $x \in R$, on a $\|x\| = \sup_{s \in I} \|x\|_s$ (ou encore si cette

relation est vérifiée après remplacement de la norme donnée dans R par une norme équivalente). Exemples d'anneaux de type C : 1° l'anneau C de toutes les fonctions continues sur I (norme de la convergence uniforme); 2° l'anneau D_1 des fonctions continûment différentiables sur I [norme: $\|x\| = \sup_{t \in I} (|x(t)| + |x'(t)|)$]. Le but

de l'A. est de caractériser les anneaux de type C qui contiennent D_1 (et, naturellement, sont contenus dans C) et possèdent un générateur. Ces anneaux sont construits comme suit: soit $\alpha(t)$ une fonction positive et bornée sur intervalle I , semi-continue supérieurement, et possédant la propriété suivante: si une suite de fonctions $x_n \in D_1$ converge uniformément vers 0 et si les fonctions $\alpha(t)x_n(t)$ convergent uniformément vers une fonction limite $\theta(t)$, alors θ est identiquement nulle [ces fonctions α ont été étudiées par l'A. dans un précédent article (cc Zbl. 37, 44)]; alors le plus général des anneaux cherchés s'obtient, par complétion, en introduisant dans l'ensemble des polynômes la norme $\|P\| = \sup_{t \in I} (|P(t)| + \alpha(t) \cdot |P'(t)|)$.

— L'A. pose ensuite le problème fort intéressant que voici: soit R_α l'algèbre formée ci-dessus à l'aide d'une fonction α ; peut-on donner une caractérisation „interne“ des fonctions continues qui appartiennent à R_α ? Pour cela, introduisons les ensembles $F_n = \{\alpha(t) \geq n^{-1}\}$; les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction continue $f(t)$ appartienne à R_α sont alors les suivantes: (a) f est absolument continue dans tout intervalle où $1/\alpha(t)$ est sommable; (b) la dérivée $f'(t)$ de f [qui existe dans l'ensemble $\alpha(t) \neq 0$, et y est définie à un ensemble de mesure nulle près] peut être choisie continue sur chaque F_n ; (c) posant $m_n = \sup_{t \in F_n} |f(t)|$, où

bien entendu f' est supposée continue sur F_n , on a la relation $m_n = o(n)$ pour $n \rightarrow +\infty$. Nous ne pouvons donner ici un résumé de la démonstration de l'A., mais il est sans doute utile de dire qu'elle est fort subtile. *Roger Godement.*

Šnol', I. È.: Der Bau der Ideale in Ringen R_α . Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 143—146 (1950) [Russisch].

(Voir la précédente analyse pour la définition des algèbres R_α .) Le but de cet article est de montrer que, dans une algèbre R_α , tout idéal fermé est l'intersection des idéaux primaires qui le contiennent; par idéal primaire on entend comme toujours un idéal fermé contenu dans un idéal maximal, et la structure de ces idéaux primaires est la suivante: un idéal primaire est l'ensemble des fonctions qui sont nulles, ainsi éventuellement que leur dérivée, en un point du segment I . La démonstration de l'A. est simple. *Roger Godement.*

Vajnberg, M. M.: Über die Stetigkeit gewisser Operatoren von spezieller Form. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 253—255 (1950) [Russisch].

Soient B un ensemble mesurable dans un espace euclidien, L^p et L^r deux des espaces bien connus formés sur B et la mesure de Lebesgue, enfin, $f(u, x)$ une fonction numérique définie sur $R \times B$ (R : ensemble des nombres réels) et assujettie à des conditions de mesurabilité convenables; l'A. étudie dans quel cas l'opérateur H défini par $Hu(x) = f(u(x), x)$ applique continûment L^p dans L^r . L'A. donne d'abord une condition nécessaire et suffisante, de laquelle résulte que H est continu au moins dans les deux cas suivants: 1. $|f(u, x)| \leq a(x) + b|u|^{p/r}$ où b est une constante et où $a \in L^r$; 2. H applique toute partie bornée de L^p dans une partie compacte de L^r . *Roger Godement.*

Kračkovskij, S. N. und M. A. Gol'dman: Über den Hauptteil eines vollstetigen Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 945—948 (1950) [Russisch].

Soit A un opérateur linéaire complètement continu dans un espace de Hilbert H ; si $1/\lambda$ est valeur propre de A , soit (x_1, \dots, x_n) un système maximal de vecteurs indépendants avec les relations

$$\lambda \cdot Ax_1 = x_1, \quad \lambda \cdot Ax_2 = x_2 + x_1, \quad \dots, \quad \lambda \cdot Ax_n = x_n + x_{n-1};$$

quand on fait varier λ , les systèmes de vecteurs ainsi obtenus soutiennent un sous-espace fermé L de H ; les AA appellent partie principale de A l'opérateur égal à A sur L et nul sur $H - L$. Parmi les quelques résultats annoncés, citons le suivant: la résolvante de A a pour partie principale la résolvante de la partie principale de A .

Roger Godement.

Krasnosel'skij, M. A.: Über ein Fixpunktprinzip für vollstetige Operatoren in Funktionalräumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 13—15 (1950) [Russisch].

L'A. annonce le théorème suivant: soient E un espace de Banach, F un opérateur complètement continu (non nécessairement linéaire) dans E , S une sphère dans E , T la frontière de S ; supposons que le champ de vecteurs $\Phi(x) = F(x) - x$ ne s'annule pas à l'intérieur de S , et que, pour deux points x, x^* de S symétriques par rapport au centre de S , les vecteurs $\Phi(x)$ et $\Phi(x^*)$ soient non proportionnels; alors on a $\Phi(y) = 0$ pour au moins un $y \in T$. L'A. signale ensuite des applications aux équations intégrales; en particulier, aux équations de la forme

$$x(s) = \int_G K(s, t) \cdot f(x(t), t) dt. \quad \text{Roger Godement.}$$

Krasnosel'skij, M. A.: Über eine topologische Methode beim Problem der Eigenfunktionen nichtlinearer Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 5—7 (1950) [Russisch].

This note is a contribution to the theory of the spectral theory of totally continuous (vollstetig) non linear operators in Banach spaces. These operators are restricted to being defined in a vicinity of the origin and to having a Fréchet diffe-

rential. J. Schauder and J. Leray [see: Ann. sci. École norm. sup., III. S. 51, 45—78 (1933); this Zbl. 9, 73] have extended the notion of degree of a mapping due to Brouwer in the case of euclidean spaces, to the case of mappings in a Banach space. The author applies their method of proof to the study of a vector field $(V): Fx - x$, $x \in S$, F being an operator subject to the above mentioned conditions and S the boundary of a bounded, open set containing the origin. It is surprising to see that no further restrictions are imposed on S and one wonders whether the author is not implicitly making use of a few more assumptions. Following the method of Schauder and Leray he has no difficulty in defining the degree of the vector field (V) and to extend to it a theorem, due to Hopf in the case of vector fields on n -spheres; he proves that two vector fields like (V) are homotopic if and only if they have the same degree. An existence theorem is easily deduced from this extension of Hopf's theorem concerning what the author calls a „ramification of eigenvectors“ corresponding to the eigenvalue λ of the Fréchet differential of F . This theorem holds only if the degree of multiplicity of λ is odd. Then the vector fields $(\lambda - \varepsilon) \cdot Fx - x$ and $(\lambda + \varepsilon) \cdot Fx - x$, $x \in S$, have not the same degree and therefore whatever be ε , the equation

$$x = h F_1 + (1 - h) F_2, \quad h > 0, \quad F_1 = (\lambda - \varepsilon) F, \quad F_2 = (\lambda + \varepsilon) F$$

has always a solution. — The author states without proofs a number of results which he has obtained as applications of his theory. The most interesting of them concerns the spectral theory of the operator

$$A \cdot \Phi = \int_b^a K(x, y) \cdot f(x, \Phi(y)) \cdot dy$$

where f is continuous in its two arguments and continuously differentiable with regard to the second. An eigenfunction $\Phi_{\lambda_0}(y)$ corresponding to the eigenvalue λ_0 being obtained, it may be possible to continue it with respect to λ , namely to determine a family of functions $\Phi_\lambda(y)$ which are eigenfunctions of the values λ in a certain vicinity of λ_0 .

C. Racine.

Berman, D. L.: Über einige lineare Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 249—252 (1950) [Russisch].

Soit C l'espace des fonctions continues sur $[-1, +1]$, et considérons un opérateur continu $U_n^{(k)}$ qui applique C dans l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ et qui, sur ces polynômes, se réduit à l'opérateur d^k/dx^k . L'A. montre d'abord que la norme d'un tel opérateur est $\geq c \cdot n^{2k}$ où c est une constante absolue (ce qu'on voit en calculant la dérivée k -ème du n -ème polynôme de Legendre). — Comme exemple d'opérateurs du type précédent, l'A. considère des suites croissantes de points de $[-1, +1]$, soit $x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) et pour chaque n les polynômes d'interpolation de Lagrange $l_1^{(n)}, \dots, l_n^{(n)}$; les opérateurs cherchés sont alors donnés par

$$L_n^{(k)} f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_n^{(i)}) \cdot \frac{d^k}{dx^k} l_i^{(n)}(x);$$

pour $k = 1$ on a donc des inégalités de la forme

$$\sup_{|x| \leq 1} \sum_{i=1}^n \left| \frac{d}{dx} l_i^{(n)}(x) \right| \geq c_1 \cdot n^2$$

où c_1 est une constante absolue; l'A. démontre que le premier membre de cette inégalité est en fait $O(n^2)$ lorsque les points $x_n^{(i)}$ sont les racines du polynôme $(1 - x^2) \cdot v_n(x)$, où $v_n(\cos \theta) = (\sin(n - 1)\theta)/\sin \theta$.

Roger Godement.

Gurevič, A. A. und V. A. Rochlin: Approximationssätze für meßbare Strömungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 537—548 (1950) [Russisch].

Soit M un espace muni d'une mesure positive de masse totale 1, et sur lequel

est donné un groupe à un paramètre (S_t) d'automorphismes, avec les conditions usuelles de mesurabilité. On dit que (S_t) est périodique si S_p est l'identité pour un nombre $p \neq 0$, et que (S_t) est apériodique si, au contraire, $S_t x = x$ pour un x implique $t = 0$. Un système périodique pour lequel toutes les trajectoires sont de mesure nulle s'appelle „système standard“; d'après les résultats de Ambrose et Kakutani, deux systèmes standard ayant même période sont isomorphes du point de vue de la théorie de la mesure. Ceci dit, le principal résultat démontré par les AA. est le suivant: soit (S_t) un système apériodique, et soient p et ε deux nombres > 0 ; alors il existe un système périodique (P_t) de période p pour lequel l'ensemble des $x \in M$ vérifiant $S_t x \neq P_t x$ pour un t au moins est de mesure extérieure $< 1/p + \varepsilon$.

Roger Godement.

Barbašin, E. A.: Über die Homomorphismen dynamischer Systeme. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 455—470 (1950) [Russisch].

Soit (R, G) un système dynamique, c'est-à-dire un espace localement compact à base dénombrable R sur lequel opère un groupe topologique commutatif G [on suppose l'application $(g, x) \rightarrow g(x)$ de $G \times R$ dans R continue]; par un homomorphisme de (R, G) dans un autre système (R', G') , l'A. entend l'objet formé par une application continue θ de R dans R' et une représentation continue θ^* de G dans G' telles que l'on ait identiquement $\theta(g(x)) = \theta^*(g)(\theta(x))$; un tel homomorphisme est dit invariant si θ^* applique G sur l'élément unité de G' (en sorte que les trajectoires de R sont appliquées sur des points de R'). Le système (R, G) est dit indécomposable si tout homom. invariant de ce système applique R sur un point. — Soit K le groupe additif des nombres réels modulo 1; en faisant opérer K sur lui-même, on obtient un système dynamique (K, K) , et tout homom. de (R, G) dans (K, K) s'obtient en prenant une fonction $\alpha(x)$ à valeurs dans K , vérifiant $\alpha(g(x)) = \alpha^*(g) + \alpha(x)$ où α^* est un caractère de G [il serait plus adéquat de considérer K comme groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1; les homom. de (R, G) dans (K, K) seraient alors les fonctions continues $f(x)$ avec $|f(x)| = 1$ et vérifiant une „équation fonctionnelle“ de la forme $f(g(x)) = \chi(g) \cdot f(x)$]. Soit L l'ensemble de ces homom. de (R, G) dans (K, K) ; ils forment de façon évidente un groupe additif, que l'A. munit d'une topologie (convergence uniforme sur tout compact); dans L , les homom. invariants forment un sous-groupe H , qui est évidemment fermé; s'il existe dans R des points dont les trajectoires soient relativement compactes, H est même ouvert dans L . Le groupe quotient $\Delta = L/H$ est appelé groupe des caractères du système (R, G) ; si (comme on le supposera dans la suite) l'hypothèse qu'on vient d'énoncer est vérifiée, Δ est un groupe discret dénombrable; par ailleurs, pour $g \in G$, $\alpha^*(g)$ définit un caractère du groupe L , égal à 1 sur H , donc un caractère de Δ ; les caractères de Δ ainsi obtenus forment, dans le groupe dual A de Δ , un sous-groupe partout dense A_0 , et Δ n'est autre que le groupe des caractères du système dynamique (A, A_0) obtenu en faisant opérer A_0 sur A de façon évidente. L'A. donne ensuite une condition pour que (R, G) possède un „système complet“ de caractères [c'est-à-dire pour qu'on puisse séparer les points de R par des homom. dans (K, K)]; si le système est indécomposable, une condition nécessaire et suffisante est que R possède des points presque-périodiques relativement à G (auquel cas R est compact et peut être muni d'une structure de groupe abélien). La fin de l'article étudie les trajectoires presque périodiques dans le cas des systèmes dynamiques obtenus à partir de systèmes d'équations différentielles.

Roger Godement.

Anzai, Hirotada: A remark on spectral measures of the flow of Brownian motion. Osaka math. J. 1, 95—97 (1949).

Notations: A : interval on the infinite line. Ω : measure space of Brownian motions $x(A, \omega)$, $\omega \in \Omega$. T_t : flow on Ω defined by $x(A, T_t \omega) = x(A + t, \omega)$.

f : function belonging to $L_2(\Omega)$, such that $\int f(\omega) d\omega = 0$. $\varphi(t) = \int \varphi(T_t \omega) \overline{f(\omega)} d\omega$.
 $g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuz} q(z) dz$. Theorem: q has an absolutely continuous spectral measure $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$. Christian Pauc.

Anzai, Hirotada: Mixing up property of Brownian motion. Osaka math. J. 2, 51—58 (1950).

X, Y : measure spaces. Ω : complete product measure space. μ, ν, ω : measures in X, Y and Ω respectively. q_t, ψ_t : measurable flows in X and Y respectively. R : space of real numbers. m : Lebesgue measure in R . $\alpha(t, x)$: real valued function defined on $R \times X$ satisfying: (C 1) for any t in R , $\alpha(t, x)$ is μ -mesurable; (C 2) $\alpha(t, x)$ is ω -mesurable; (C 3) for every s and t in R , $\alpha(s, x) + \alpha(t, q_s(x)) = \alpha(s+t, x)$. T_t : one-to-one transformation on Ω defined by $T_t(x, y) = (q_t(x), \psi_{\alpha(t, x)}(y))$. β : real valued measurable function on X . $V(x, y) = (x, \psi_{\beta(x)}(y))$. Necessary and sufficient conditions, simple sufficient conditions are given under which (a) the one-parameter group $\{T_t\}$ is a measurable flow, called skew product flow for the function α , (b) V is a measure preserving transformation on Ω . Two skew product flows T_t and S_t are called equivalent if there exists a measure preserving V such that $T_t = V S_t V^{-1}$. Theorem 1: If X is the space of the Brownian motions represented by interval functions $x(a, b) = x(a) - x(b)$, q_t the flow of translations in X defined by $q_t(x(a, b)) = x(a+t, b+t)$, ψ_t a measurable ergodic flow on Y , then $T_t(x, y) = (q_t(x), \psi_{x(t)-x(0)}(y))$ is strongly mixing. Theorem 2: If $X = R$, $q_t(x) = t + x$, then for any $\alpha(t, x)$ there exists a measurable function $\beta(x)$ on X such that $\alpha(t, x) = \beta(q_t(x)) - \beta(x)$. Theorem 3: If X is the circle of unit length, q_t the rotation of X by the angle $2\pi t$, then for any function $\alpha(t, x)$ there exists a constant c and a measurable function $\beta(x)$ on X such that $\alpha(t, x) - c t = \beta(q_t(x)) - \beta(x)$. The main tool in the proof of Theorem 1 is the spectral resolution of the one-parameter group of unitary transformations of $L^2(Y)$ corresponding to the flow ψ_t . The flow T_t in Theorem 1 is not equivalent to a direct product flow. Such an equivalence is true under the assumptions of Theorem 3. Christian Pauc.

Nikol'skij, K. V.: Über unendliche Matrizen, die in der Theorie der sekundären Quantelung verwendet werden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 39—40 (1950) [Russisch].

L'A. considère des matrices de la forme

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{n-1} & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(les termes non écrits sont nuls), et semble avoir l'intention d'en déduire, par passage à la limite sur n , matrices de rang infini; c'est ainsi qu'on a la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Omega_n)^n = \Omega^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots) \cdot E_\infty$$

où E_∞ est la matrice unité de rang infini. L'A. semble dire que ces méthodes sont utiles dans la mécanique quantique, ce que le rapporteur n'est pas en mesure de contester; toutefois, du point de vue purement mathématique, on ne peut se défendre d'un certain sentiment de malaise devant les équations écrites par l'Auteur.

Roger Godement.

Praktische Analysis:

Flanders, Donald A. and George Shortley: Numerical determination of fundamental modes. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 1326—1332 (1950).

Zur Bestimmung der charakteristischen Zahlen λ_n und Eigenvektoren u^n einer quadratischen symmetrischen Matrix ω gehen Verf. aus von

$$v = \sum_n c_n u^n, \quad P(\omega) v = \sum_n P(\lambda_n) c_n u^n,$$

wobei v ein willkürlicher Vektor mit den Entwicklungskoeffizienten c_n und $P(\lambda)$ ein beliebiges Polynom von λ ist. Zur stärkeren Trennung der charakteristischen Zahlen bei einem Iterationsschritt wird nach einem Polynom $P(\lambda)$ gefragt, welches für λ_1 etwa den Wert 1 und für die übrigen λ_n Werte von möglichst kleinem Betrag annimmt. Als „bestes“ Polynom unter allen von gegebenem Grade m ergibt sich eines, welches im wesentlichen mit dem Tschebyscheffschen Polynom m -ten Grades übereinstimmt. Eine Zahlentafel erleichtert die Anwendung auf die numerische Rechnung.

Lothar Collatz.

Couffignal, L.: Rôle du calcul numérique dans la recherche scientifique et technique. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. **14** (Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique, Marseille 30. 3.—6. 4. 1948; Paris 8.—9. 4. 1948), 97—104 (1949).

Die Abhandlung will die Rolle, die die numerischen Methoden bei der Anwendung der Mathematik insbesondere auf Ingenieurwissenschaften spielen, genauer untersuchen und feststellen, in welcher Richtung die Entwicklung hier geht. Unter numerischen Methoden werden dabei all die verschiedenartigen Methoden, außer den analytischen, verstanden, die die vollständige Behandlung der Probleme ermöglichen. Die Anwendung erfolgt immer so, daß ein konkretes Problem durch abstrakte Symbole dargestellt wird, daß man eine Lösung des so entstehenden abstrakten Problems sucht und daß man dann wieder zum konkreten Ausgangsproblem zurückkehrt. Die dabei möglichen Wege werden an instruktiven Diagrammen aufgezeigt. Wichtig ist die Untersuchung der verschiedenen Strukturen der Probleme und ihrer wechselseitigen Beziehung. Dabei wird der Begriff der „mathématiques utilisables“ eingeführt, unter der die Theorien zusammengefaßt werden, die es erlauben, in vernünftiger Frist eine numerisch gestellte Frage numerisch zu beantworten. Meist handelt es sich da um Näherungsverfahren. Die Verfahren der „mathématiques utilisables“ können gelegentlich den Weg zur reinen Theorie eröffnen, wie an Beispielen gezeigt wird.

Friedrich August Willers.

Sard, Arthur: Smoothest approximation formulas. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **20**, 612—615 (1949).

Es sei $A = \int_a^b x(t) dt$ eine Approximation einer Funktion $f[x]$. Der Fehler kann als eine Summe $R + \delta A$ dargestellt werden, wobei $R = A - f[x]$ hervorzuheben würde, falls x exakt wäre, und δA davon herrührt, daß x fehlerhaft ist. Als „glatteste“ Approximationsformeln (χ) werden diejenigen bezeichnet, welche die kleinste Variation δA ergeben. Allgemeine Betrachtungen werden angestellt und insbesondere glatteste Integrationsformeln gesucht, die für Polynome vom höchstens n -tem Grade exakt sind. Bis $n = 7$ werden die Restglieder gegeben. Nyström.

Sard, Arthur: Best approximate integration formulas; best approximation formulas. Amer. J. Math. **71**, 80—91 (1949).

Wird das Integral $I = \int_0^m x(t) dt$ durch eine Mittelwertformel approximiert, die $m + 1$ Werte des Integranden benutzt, und erhält man die exakten Werte, falls $x(t)$ ein Polynom von höchstens n -tem Grade ist, so ergibt sich unter allgemeinen Stetig-

keitsbedingungen ein Restglied der Form $I - A = \int_0^m x^{(n+1)}(t) k(t) dt$. „Beste“

Approximationen sind diejenigen, welche das Restglied zu einem Minimum machen. Für gegebene m und n existiert nicht mehr als eine beste Formel der betreffenden Art. Die Koeffizienten und die Werte des Restglieds werden für $n \leq 3$, $m \leq 6$ gegeben. Am Schluß der Arbeit wird ein allgemeineres Problem behandelt.

Evert Johannes Nyström.

Meyers, Leroy F. and Arthur Sard: Best approximate integration formulas. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 118—123 (1950).

Es handelt sich um Mittelwertformeln mit m äquidistanten Ordinaten, welche für Polynome von höchstens n -tem Grade exakt sind. Als beste Formeln gelten diejenigen, die ein gewisses Restglied allgemeiner Form zu einem Minimum machen. Für $n = 1$, $m \leq 20$; $n = 2$, $m \leq 12$; $n = 3$, $m \leq 9$ werden die Koeffizienten der Formeln gegeben sowie die entsprechenden Werte des Restglieds. Auf einige bisher nicht erledigte Fragen hinsichtlich der Konvergenz der Koeffizienten wird hingewiesen.

Evert Johannes Nyström.

Birkhoff, Garrett and David Young: Numerical quadrature of analytic and harmonic functions. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 217—221 (1950).

Folgende, fünf Punkte benutzende Formel für numerische Integration einer analytischen Funktion $f(z)$ in der komplexen Ebene, bzw. einer reellen harmonischen Funktion wird besprochen und insbesondere mit der entsprechenden Simpsonschen Formel verglichen:

$$\int_{z_3}^{z_1} f(z) dz \approx \frac{1}{15} h [24 f_0 + 4(f_1 + f_3) - (f_2 + f_4)].$$

Hierbei ist $f(z_k) = f_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Die fünf Punkte z_k sind Mitte und Ecken eines Quadrats mit der Seite $|2h|$. In den meisten Fällen kann h reell oder rein imaginär angenommen werden.

Evert Johannes Nyström.

Reiz, A.: A variational solution of a perturbation problem in the theory of stellar structure. Ark. Astron., Stockholm 1, Nr. 16, 187—191 (1950).

Das Ritzsche Verfahren wird bei einer linearen Randwertaufgabe (verschwindende Randwerte, inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten) angewendet.

Lothar Collatz.

Salzer, Herbert E.: Formulas for numerical integration of first and second order differential equations in the complex plane. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 207—216 (1950).

In der komplexen Zahlenebene $z = x + iy$ wird ein quadratisches Gitter der Maschenweite h zugrunde gelegt: $z = z_0 + (j + ik)h$ (mit $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) und werden n Punkte herausgegriffen ($3 \leq n \leq 9$); es werden bestimmte Anordnungen gewählt, für $n = 3$ z. B. $j, k = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ und für $n = 9$ die 9 Punkte eines Quadrates der Seitenlänge $2h$. Eine Funktion $f(z)$ wird durch ein Lagrangesches Polynom $P(z)$ ersetzt, welches mit $f(z)$ in den gewählten n Punkten übereinstimmt, und es werden durch ein- bzw. zweimalige Integration von $P(z)$ Näherungsausdrücke für

$F(z) = \int^z f(z) dz$ und $G(z) = \int^z F(z) dz$ aufgestellt; diese Ausdrücke können, wenn man noch Extrapolationsformeln hinzunimmt, zur näherungsweisen Integration von Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung benutzt werden, indem aus den Werten in n Gitterpunkten Näherungswerte in den benachbarten Gitterpunkten ermittelt werden. Für $n = 3$ bis $n = 9$ werden die in den Formeln auftretenden Koeffizienten auf 5 Seiten vollständig wiedergegeben.

Lothar Collatz.

Bückner, Hans: Konvergenzuntersuchungen bei einem algebraischen Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Integralgleichungen. Math. Nachr., Berlin 3, 358—372 (1950).

Verf. ersetzt die Integralgleichung $\varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$ mit reellem, stetigem und symmetrischem Kern $K(s, t)$ und stetigem $f(s)$ durch das lineare Gleichungssystem

$$F(x_k^{(n)}) - \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n K(x_k^{(n)}, x_i^{(n)}) F(x_i^{(n)}) \theta_i^{(n)} = f(x_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

in dem n eine natürliche Zahl bedeutet und die Abszissen $0 \leq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq 1$ sowie die positiven Zahlen $\theta_i^{(n)}$ so gewählt sind, daß

$$\int_0^1 g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i^{(n)} g(x_i^{(n)})$$

für jede stetige Funktion $g(x)$ gilt, und beweist (unter geeigneten Voraussetzungen) Konvergenzsätze vom Typ $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) (\lambda_\alpha - \lambda_\alpha^{(n)}) = \omega_\alpha$, wobei die λ_α die (passend

geordneten) Eigenwerte der Integralgleichung, die $\lambda_\alpha^{(n)}$ die entsprechenden Eigenwerte des linearen Gleichungssystems, die ω_α gewisse, explizit darstellbare Konstanten sind und $\psi(n)$ eine mit n über alle Grenzen wachsende Funktion bedeutet. Auch für die Eigenfunktionen und die Lösungen der inhomogenen Integralgleichung werden analoge Fehlerabschätzungen gegeben. Nach einem Hinweis auf die Beziehungen zur Störungsrechnung werden die Konvergenzsätze für noch allgemeinere Finitisierungen der Integralgleichung hergeleitet, durch die man u. U. eine Konvergenzverbesserung erzielen kann. — Als Anwendung wird bewiesen, daß für einen Kern mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur m -ten Ordnung $\omega_\alpha = 0$ bei $\psi(n) = n^m$ wird, wenn man die $x_i^{(n)} = (i - \frac{1}{2})/n$ und die $\theta_i^{(n)}$ passend wählt, und daß für einen Kern vom Typ einer Greenschen Funktion durch das verallgemeinerte Verfahren wirklich eine Konvergenzverbesserung erreicht wird. Schließlich wird gezeigt, wie man die Sätze zur Einschließung von Eigenwerten verwenden kann.

Johannes Weissinger.

Smirnov, S. V.: Zum Problem der allgemeinen Anamorphose. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 297—300 (1949) [Russisch].

Bekanntlich ist eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nomographisch mit Hilfe von Fluchtlinientafeln oder geradlinigen Netztafeln darstellbar, wenn sie auf die Form

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & 1 \\ g_1(y) & g_2(y) & 1 \\ h_1(z) & h_2(z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

gebracht werden kann. Hierin besteht das Problem der allgemeinen Anamorphose. Falls die Gleichung nach z aufgelöst werden kann und

$$M = -\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial y}$$

bedeutet, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} \right) - C \left(2 \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \right) - D \left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \quad D = M C + N,$$

mit den unbekannten Funktionen C und D miteinander vereinbar sind [Gronwall, J. Math. pur. appl. Paris, VI. S. 8, 59 (1912)]. Gibt es Lösungen dieses Gleichungssystems, die einen der Klammerausdrücke im einzelnen verschwinden lassen oder

gilt $\frac{\partial^2 \ln M}{\partial x \partial y} = 0$, so ist die Lösung der Aufgabe bekannt. Verf. beschäftigt sich mit dem Gegenfall und kommt durch Erweiterungen des Gleichungssystems durch wiederholte Differentiation dazu, die Frage der Vereinbarkeit auf diejenige eines gewissen Systems algebraischer Gleichungen zwischen den ersten Ableitungen ge-

wisser Hilfsfunktionen zurückzuführen. Aus dem Bau ihrer Koeffizienten ergibt sich dann der Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung der Existenz der Anamorphose hat die Form $R \left(\frac{\partial^k M}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right) = 0$, wo R ein Polynom mit rationalen Koeffizienten der Funktion M und ihrer partiellen Ableitungen bis zur 7. Ordnung ist. Diese können durch eine endliche Anzahl von Differentiationen und Eliminationen gefunden werden.

Erik Svenson.

Ostrowski, A.: *La recherche des périodicités cachées.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22.6.1947), 93—95 (1949).

Verf. gibt eine kurze Übersicht über die Prinzipien, auf denen die verschiedenen in der Periodenforschung angewandten Methoden beruhen.

Karl Stumpff.

Hartree, D. R.: *Automatic calculating machines.* Math. Gaz., London 34, 241—252 (1950).

Nach einleitenden historischen Notizen eine kurze Beschreibung der typischen Eigenschaften programmgesteuerter Rechenmaschinen unter besonderer Berücksichtigung des EDSAC, der an der Universität Cambridge gebauten Maschine. Bemerkenswert ist das Zitat eines Ausspruchs von Byrons Tochter, Lady Lovelace, der vor über hundert Jahren der „analytical engine“ von Charles Babbage galt: „The machine has no pretensions to originate anything; it can only do what we know how to order it to perform“. Dieser Ausspruch gilt unverändert auch für die modernen Maschinen.

Hans Bückner.

● **Tompkins, C., J. Wakelin and W. Stiffler:** *High-speed computing devices.* New York: McGraw-Hill 1950. XIV, 451 p. \$ 6,50.

● **The Staff of the Computation Laboratory:** *Tables of the Bessel functions of the first kind of orders fifty-two through sixty-three.* (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, 12.) Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press; London: Geoffrey Cumberlege; Oxford University Press 1949. 544 p. \$ 8,00.

Die Tafel stellt den 10. Band in der Tabellierungsreihe der Besselfunktionen $J_n(x)$ für reelles Argument im Bereich $0 < x < 100$ dar und umfaßt die Ordnungen $n = 52(1)63$. Die Funktionswerte werden mit 10 Dezimalen angegeben, so daß z. B. $J_{57}(x)$ zum ersten Male bei $x = 31,50$ mit einer Einheit in der 10-ten Dezimale auftritt. Alle Funktionen sind mit einem Schritt von $1/100$ vertafelt. Bezüglich der Berechnungsmethoden und Interpolation wird auf den 1. und 3. Tafelband (Volume III and V of the Annals of the Computation Laboratory) verwiesen.

Heinz Unger.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Salvi, Filippo: *Estensione di alcuni teoremi classici del calcolo delle probabilità.* Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 282—308 (1949).

Verf. dehnt einige Sätze für den Fall einer einfachen Alternative aus auf den multinomialen Fall, so z. B. das Theorem über die asymptotisch normale Verteilung der verallgemeinerten Bernoullischen Verteilung von Poisson, falls

$\sum_{i=1}^n p_i q_i \rightarrow \infty$ ($p_i + q_i = 1$), auf den Fall, daß jedem Einzelereignis mehr als zwei Wahrscheinlichkeiten ($\neq 0$) zukommen können.

Leopold Schmetterer.

Dufresne, Pierre: *Problèmes de dépouillements. I. Problèmes intéressant deux candidats.* Gaz. Mat., Lisboa 11, Nr. 44—45, 8—14 (1950).

I. Solution déjà publiée [Bull. math. Fac. Sci. grandes Ecoles 4, 225—234 (1938)] du problème de J. Bertrand, résolu pour la 1^{re} fois par Désiré André

[C. r. Acad. Sci., Paris 105, 436—437 (1887)]. II. Généralisation: Si une urne contient a bulletins de vote au nom du candidat A et b au nom de B , la probabilité pour que A ne soit jamais distancé de plus de $(m-1)$ suffrages par B , le candidat B n'étant lui-même jamais distancé de plus de $(r-1)$ suffrages par A , est: $1 - \sum_{t=1}^{\alpha} \left[\binom{a+b}{a+mt+rt-r} - \binom{a+b}{a+mt+rt} + \binom{a+b}{a-mt-rt+m} - \binom{a+b}{a-mt-rt} \right] / \binom{a+b}{a}$ α étant la plus petite valeur de t pour laquelle chacun des quatre coefficients binomiaux est nul. Preuve par récurrence. III. Valeur approchée en négligeant les derniers termes de chaque somme. [On observera que celles-ci peuvent s'intégrer par la formule de Ramus.] IV. Probabilité pour que durant tout un dépouillement A devance constamment B d'au moins $(m+1)$ suffrages, sans que B soit jamais distancé de plus de $(r-1)$ suffrages par A . [Page 9², supprimer deux grands crochets.] Albert Sade.

Dufresne, Pierre: Problèmes de dépouillements. II. Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats. Gaz. Mat., Lisboa 11, Nr. 46, 6—12 (1950).

L'A. démontre au moyen de points en ligne droite, une relation, due à Chasles, et qui revient plus généralement à ceci: Une fonction (x, y) satisfaisant à l'égalité transitive: $(a, b) + (b, c) = (a, c)$ et à: $(a, a) = 0$ vérifie l'identité: $\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i, x_j)^{-1} \equiv 0$

($j \neq i$). Application. Une urne contient x_a bulletins au nom du candidat X_a ($x_a > x_b$ si $a < b$). La probabilité pour que, pendant tout le dépouillement, le nombre des bulletins sortis, au nom de X_a soit supérieur au nombre des bulletins sortis au nom de X_b pour tout $a < b$, est: $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i - x_j}{x_i + x_j}$. Preuve analogue à celle du

cas de deux candidats. Le même résultat avait été obtenu par une autre voie [R. Lagrange, Bull. math. Fac. Sci. grandes Ecoles; Février 1939]. [Page 8¹, ligne 35, lire E au lieu de A . p. 8², l. 18—20, toutes les fractions doivent avoir le signe +. l. 24, la différence a pour limite 1 quand A tend vers B . p. 10¹ l. 8, lire: page 9, au lieu de: page 3. p. 10², l. 10 et 16, lire $c + n - 1$ au lieu de $c + n$. p. 11¹, ligne 29, lire $AD = AC + CD$ au lieu de $= BC + CD$.] Albert Sade.

Collinder, Björn: La règle de succession dans le calcul des probabilités. Från filosofiens och forskningens fält, Uppsala 1950, 138—156 (1950).

Das nach Laplaces Beispiel als „Wahrscheinlichkeit des Sonnenaufgangs“ bekannte Problem wird behandelt und erörtert. Verf. erklärt, er habe für die Laplacesche Lösung einen neuen vereinfachten und von „Umwegen der Analyse“ und „konventionellen Hypothesenwahrscheinlichkeiten“ unabhängigen Beweis gegeben. In der Tat ist die Problemstellung ganz verschieden (so daß die angenäherte Übereinstimmung der Lösungen bloß zufällig ist). Es werden nämlich folgende drei Hypothesen als möglich betrachtet: A a , ewiger Sonnenaufgang nach Naturgesetz; A b , Änderung nach Naturgesetz; B , Kopf-Adler Schema (Wahrscheinlichkeit = $1/2$, Unabhängigkeit der Versuche). Die A-priori-Wahrscheinlichkeiten von $A = Aa + Ab$ und B werden als gleich ($1/2$, $1/2$) angenommen; für diejenigen von Aa und Ab wird das Verhältnis $(1+m):1$ angegeben (der Gedankengang scheint dem Ref. unhaltbar). — Die Meinungen von mehreren Verfassern werden untersucht und verglichen. Bruno de Finetti.

Münzner, Hans: Über die Verteilungszahl. Arch. Math., Karlsruhe 2, 42—48 (1949/50).

Als Verteilungszahl $D = D_N(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ wird die Anzahl der verschiedenen Arten bezeichnet, die bei der Verteilung von a_1 Elementen einer ersten Gattung, a_2 Elementen einer zweiten Gattung, \dots , a_n Elementen einer n -ten Gattung auf m Zellen möglich sind, wenn die erste Zelle genau b_1 , die zweite Zelle genau

b_2, \dots , die m -te Zelle genau b_m Elemente aufweisen soll. Die Zahl aller Elemente ist $N = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$. Für die Statistik bedeutet D die Anzahl der möglichen Korrelationstabellen zu fest vorgegebenen Randverteilungen. — Eine explizite Formel für D kennt man nicht; auch bei verhältnismäßig kleinen a_i , b_j , n und m ist eine Berechnung mit Rekursionsformeln nicht zu bewältigen. Für

$$D_N(1, 1, \dots, 1 | b_1, b_2, \dots, b_m)$$

ist eine Näherungsformel für große N bekannt, die durch Anwendung der Stirling'schen Formel gefunden wurde. Für den allgemeinen Fall leitet Verf. die Formel

$$D \approx m^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{m+1}{2\pi(Nm + \sum a_i^2)} \right)^{\frac{1}{2}(m-1)} \prod_{i=1}^n \binom{a_i + m - 1}{m - 1} \cdot \exp \left(- \frac{N \cdot (m+1)}{2(Nm + \sum a_i^2)} \chi^2 \right)$$

mit
$$\chi^2 = \frac{m}{N} \sum_{j=1}^m \left(b_j - \frac{N}{m} \right)^2$$

her, indem er zeigt, daß D bis auf einen konstanten Faktor identisch ist mit der Lösung eines Wahrscheinlichkeitsproblems, das in doppelter Hinsicht als eine Verallgemeinerung des klassischen Problems von de Moivre angesehen werden kann. Die b_j werden als Summen unabhängiger Zufallsveränderlicher gedeutet, so daß der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden kann.

Günther Schulz.

Amato, V.: Sulla formula di De Moivre-Stirling e sua applicazione al calcolo della probabilità di un dato scarto. Ann. Ist. stat. Univ., Bari **23**, 40—53 (1947).

Steinhaus, H.: Sur la division pragmatique. Econometrica, Chicago **17**, Suppl. 315—318 und engl. Zusammenfassg. 318—319 (1949).

Verf. teilt — unter anderem — mit, daß die bei stetig teilbarem Gegenstand von $n = 2$ gleichberechtigten Teilhabern oft befolgte „gerechte“ Regel „ T_1 teilt, T_2 wählt“, nach Erledigung des Falles $n = 3$ von Banach und Knaster folgenderweise verallgemeinert wurde. T_1 trennt zunächst das von ihm geschätzte n -tel ab. Dies kann von T_2, \dots, T_n der Reihe nach belassen oder verkleinert werden. Das so sich ergebende Stück fällt unter den T_1, T_2, \dots, T_n jenem als Anteil zu, der zuletzt einen Zugriff vorgenommen hat. Aus dem jeweiligen Gesamtrest werden die übrigen Teilhaber schrittweise ähnlich befriedigt. — Bei der „gerechten“ Verteilung von m unteilbaren Gegenständen G_j unter gemäß p_k berechtigten T_k mit $\sum p_k = 1$ sollen nach Knaster zunächst die von den T_k geschätzten Werte w_{jk} der G_j festgestellt werden. Dann wird 1. jedes G_j dem Meistbietenden als Anteil zugesprochen; 2. jede Differenz zwischen $p_k \sum_{j=1}^m w_{jk}$ und dem T_k nach 1. zugesprochenem Gesamtanteil — je nachdem diese positiv oder negativ ist — T_k aus- oder von T_k eingezahlt; 3. der Gesamtbetrag der Einzahlungen unter den T_k ihrer Berechtigung p_k gemäß verteilt. — Eine mathematisch vollständige Betrachtung soll von Knaster veröffentlicht werden.

Tibor Szentmártony.

Hartley, H. O. and E. S. Pearson: Table of the probability integral of the t -distribution. Biometrika, Cambridge **37**, 168—172 (1950).

Mit Hilfe der National Physical Laboratories wurde eine Tafel des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$P(t, \nu) = \left\{ \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) / \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right) \sqrt{\pi\nu} \right) \right\} \int_{-\infty}^t (1 + \tau^2/\nu)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} d\tau$$

der t -Verteilung bei ν Freiheitsgraden mit einer Genauigkeit von 5 Dezimalen berechnet zur Erstellung der angegebenen Tafel mit doppeltem Eingang in den Argu-

menten

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = 1 \text{ (1) } 20 \\ t = 0,0 \text{ (0,1) } 4,0 \text{ (0,2) } 8,0 \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = 20 \text{ (1) } 24, 30, 40, 60, 120, \infty \\ t = 0,00 \text{ (0,05) } 2,0 \text{ (0,1) } 4,0, 5,0. \end{array} \right.$$

Hilfstafel der Werte von t bei $1 - P = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-6}$ für $\nu = 1 \text{ (1) } 10$.
— Angaben über die Genauigkeit bei linearer und parabolischer Interpolation.

Hans Richter.

Lévy, Paul: *L'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22. 6. 1947), 111—120 (1949).

Der — inzwischen in des Verf. Monographie: *Processus stochastiques et mouvement brownien* (dies. Zbl. 34, 226) eingeflochtene — Vortrag verfolgt ein doppeltes Ziel. Er beleuchtet einerseits auf Grund der Untersuchungen von Loève, Blanc-Lapierre und Fortet die Sätze von Bochner und Khintchine bzw. Cramér über die Klassen der positiv definiten Funktionen und der im quadratischen Mittel stetigen sowie mindestens in den Momenten erster und zweiter Ordnung stationären Zufallsfunktionen mit gegebener Kovarianzfunktion bzw. spektraler Zerlegbarkeit nach einer anderen Zufallsfunktion. Andererseits gibt er eine neue, nicht triviale Klasse vollständig stationärer Zufallsfunktionen an, welche im quadratischen Mittel stetig sind, endliche Momente zweiter Ordnung besitzen und somit — gemäß einer Überlegung von Loève — nach einer (in ihren Änderungen über getrennte Intervalle unkorrelierten) Zufallsfunktion harmonisch zerlegbar sind.

Tibor Szentmártony.

Blanc-Lapierre, A.: *Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22. 6. 1947), 121—132 (1949).

Eine erste — durch Verzögerung in der Drucklegung — stark verspätete Zusammenfassung der, mit R. Fortet und R. Brard vorgenommenen, Untersuchungen des Verf. über die im quadratischen Mittel stetigen und mit $E[x(t)] = \text{konst.}$ sowie $E[x(t_1)x(t_2)] = \rho(t_2 - t_1) = \rho(\tau)$ mindestens von der zweiten Ordnung stationären Zufallsfunktionen. In diesen werden Teile der Sätze von Khin-

tchine bzw. Cramér über die spektrale Zerlegbarkeit von $\rho(\tau) = \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\tau dF(\nu)$

nach einer Verteilungsfunktion bzw. von $x(t) = \int_0^\infty (\cos 2\pi\nu\tau dC(\nu) + \sin 2\pi\nu\tau dS(\nu))$

nach zwei in ihren Änderungen über getrennte Intervalle nichtkorrelierten Zufallsfunktionen ziemlich unmittelbar gewonnen. Und zwar „nach Muster der optischen und elektrischen Wellenfilter oder akustischen Resonatoren“ mit Hilfe von linearen

Filtern, d. h. Faltungstransformationen $\Re[x(t)] = \int_{-\infty}^\infty x(\theta) R(t - \theta) d\theta$ mit

geeigneten Gewinn- oder Durchlaßfunktionen $G(\nu) = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i\nu t} R(t) dt$. — Eine

für die richtige Beurteilung maßgebende, vollständige und strenge Darstellung dieser Untersuchungen liegt — trotz weiterer Veröffentlichungen (dies. Zbl. 29, 149, 30, 202, 34, 223) — bedauerlicherweise noch immer nicht vor. *Tibor Szentmártony.*

Wiener, Norbert: *Sur la théorie de la prévision statistique et du filtrage des ondes.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22. 6. 1947), 67—74 (1949).

Der Vortrag versucht am Beispiel von zwei Sonderfällen einen Einblick in des Verf. — inzwischen in Buchform erschienene — Theorie der besten linearen Vorhersagung bzw. Filtrierung innerhalb stationärer Zufallsvorgänge (dies. Zbl. 36, 97 und 215) zu geben.

Tibor Szentmártony.

Mazurkiewicz, Stefan: Sur les espaces de variables aléatoires. Fundam. Math., Warszawa 36, 288—302 (1949).

Die vom weil. Verf. 1939 vollendete, aus typographischen Überresten von E. Marczewski vorliegend rekonstruierte Note zeigt die Bedeutung der Cantor-Méray-Hausdorffschen Vervollständigung der Räume M von Zufallsveränderlichen $x(x_1, \dots, x_n)$. Ein solcher Raum wird zunächst durch die — 1939 noch nicht geläufigen — richtigen Eigenschaften der zugeordneten Verteilungsfunktion $F_x(t)$ von $t(t_1, \dots, t_n)$ definiert, insbesondere durch jene — nach Marczewski bereits 1918—20 von P. J. Daniell entdeckte — welche an Stelle der zu schwachen Forderung der Monotonität von F in den einzelnen t_i , die Nichtnegativität der in den verschiedenen t_i genommenen n -fachen vorderen Differenzen von F verlangt. Diese Differenzen bestimmen bekanntlich die Wahrscheinlichkeitsmaße P der Intervalle von M und dann gemäß der absoluten Additivität jene der Elemente eines Borelschen Teilmengenkörpers von M . Nach Einführung der Fréchetischen Metrik

$$\rho(x', x'') = \inf_{\lambda > 0} \left[\lambda + P_{x', x''} \left(\mathcal{E} \mid \xi' - \xi'' \mid \geq \lambda \right) \right]$$

für die x' bzw. $x'' \in M$, welche die zufälligen Werte ξ' bzw. ξ'' annehmen, läßt sich so die mögliche Separierbarkeit und vollständige Erweiterung von M (diese als abgeschlossene Hülle von M) definieren. Verf. nennt ein separierbares M' universal, wenn es alle separierbaren M stochastisch enthält, d. h. jedem $x \in M$ ein $y(x) \in M'$ mit $F_x(t) = F_{y(x)}(t)$ zugeordnet werden kann. Verf. beweist nun folgenden merkwürdigen Satz. Nimmt man den Booleschen Körper D_m der 2^m Ergebnisse β von m Würfeln mit einer richtigen Münze, d. h. $P(\beta) = 2^{-m}$, und bezeichnet die Gesamtheit $M(D_m)$ der reellen Funktionen $y(\beta)$ einen Raum von Zufallsveränderlichen mit $F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) = \sum P(\beta)$ bezüglich aller β mit $y_k(\beta) < t_k$, dann ist die vollständige Erweiterung von $\sum_{m=1}^{\infty} M(D_m)$, d. h. dem Raume der Zufallsveränderlichen des „Schrift oder Wappen“ Spiels ein universaler Raum von Zufallsveränderlichen.

Tibor Szentmártony.

Mourier, Édith: Propriétés des caractéristiques d'un élément aléatoire dans un espace de Banach. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 28—29 (1950).

In einer vorangehenden Note (dies. Zbl. 34, 223) ist von der Verf. das Erwartungselement $E(X)$ einer Zufallsveränderlichen in einem linearen, metrischen, vollständigen, kurz B -Raum als jenes $x \in B$ definiert worden, für welches sich $x^*(x) = E[x^*(X)]$ ergibt bei allen reellen Elementen $x^* \in B^*$ des zu B adjungierten Raumes B^* aller linearen, skalarwertigen, nach einem Wahrscheinlichkeitsmaß meßbaren Funktionen $x^*(X)$. Dementsprechend ist als charakteristische Funktion von X für alle $x^* \in B^*$: $\varphi(x^*) = E[e^{i x^*(X)}]$ betrachtet worden. — Hier wird folgendes bemerkt. 1. $\varphi(x^*)$ ist mit der starken Topologie in B^* gleichmäßig, mit der schwachen einfach stetig. 2. Es gilt bei Existenz von $E(X)$ und $E(\|X\|^2)$:

$$\varphi(x^*) = 1 + i x^*[E(X)] - \frac{1}{2} E[\|x^*(X)\|^2] + \|x^*\| o(x^*)$$

mit $o(x^*) \rightarrow 0$ für $\|x^*\| \rightarrow 0$. 3. Es erweist sich $\sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k \varphi(x_j^* - x_k^*)$ nicht-negativ für alle $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ und komplexe $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. 4. Durch ein L -Maß über B wird ein einziges $\varphi(x^*)$ bestimmt, und umgekehrt durch ein $\varphi(x^*)$ wird das Maß über jede zylindrische Menge der $x \in B$, für welche $\{x_i^*(x)\}_{i=1}^n$ einer nach Borel meßbaren Menge des n -dimensionalen euklidischen Raumes angehört, festgelegt. Abschließend wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein $\varphi(x^*)$ mit der unter 3. angegebenen Eigenschaft sowie $\varphi(0^*) = 1$ charakteristische Funktion einer eigentlichen Zufallsveränderlichen in B sein soll.

Tibor Szentmártony.

Paulson, Edward: Some limiting distributions related to the sum of a random number of random variables. Proc. Amer. math. Soc. 1, 625—629 (1950).

The author considers statistics which have the cumulative distribution functions

$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k F_k(u)$, where the ω_k are functions of λ such that, for all λ , $\omega_k \geq 0$ and $\sum_k \omega_k = 1$. He derives the limiting distribution for $\lambda \rightarrow \infty$ under the conditions

(1) there exist constants a and c so that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it[(u-ak)/ck^{\frac{1}{2}}]} dF_k(u) = q(t)$$

$q(t)$ being a characteristic function or (2) there exists a constant a so that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itk^{\frac{1}{2}}(u-a)} dF_k(u) = m(t)$$

$m(t)$ being a characteristic function. — A special case of (1) is encountered when the statistic considered is $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ with the X_i being independent random variables whose distribution depends on λ . This case was studied by H. Robbins (this Zbl. 34, 225). (2) reduces in a special case to Y/N . *Stefan Vajda.*

Steinhaus, H.: Sur les fonctions indépendantes. VIII. Loi des grands nombres, suites indépendantes, suites aléatoires. *Studia math.* 11, 133—144 (1950).

In der einfachsten maßtheoretischen Deutung der reellen Zufallsveränderlichen x_i als in $(0, 1)$ L -meßbaren Funktionen $x_i(t)$ mit dem L -Maß einer meßbaren Teilmenge von $(0, 1)$ als Wahrscheinlichkeitsmaß für eine Aussage bezüglich $x_i(t)$ über die betreffende Teilmenge werden in der vorliegenden Note merkwürdige Häufigkeitsgrenzwert-Sätze im Sinne der starken Gesetze der Großen Zahlen abgeleitet. — Sind die x_i mit den Verteilungsfunktionen $F_i(x)$ paarweise unabhängig und

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(x) = F(x)$ für alle reellen x , dann ist nach dem hier mitgeteilten

Hauptsatz mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu erwarten, daß in einer verwirklichten $\{x_i = a_i\}$ -Folge die verhältnismässige Häufigkeit der $a_i < x$ -Werte gleich $F(x)$ ist. Eine der letzten Bedingung genügende $\{a_i\}$ -Folge nennt Verf. meßbar mit der Verteilungsfunktion $F(x)$. Paar- oder (endlich) systemweise Unabhängigkeit solcher läßt sich dann — wie bei den Zufallsveränderlichen — durch die Produktzerlegbarkeit der Systemverteilungsfunktion in jene der Komponenten definieren. Eine meßbare $\{a_i\}$ -Folge nennt Verf. schließlich einfache bzw. vollständige Zufallsfolge, wenn für jedes natürliche h und k die Folgen $\{a_{i+h}\}$, $\{a_{i+k}\}$ bzw. für jedes natürliche h die Folgen $\{a_i\}$, $\{a_{i+1}\}$, ..., $\{a_{i+h}\}$ unabhängig sind. Dann gilt der Satz, daß je nachdem die Zufallsveränderlichen x_i mit identischer Verteilungsfunktion zu viert bzw. in ihrer Gesamtheit unabhängig sind, eine Verwirklichungsfolge $\{x_i = a_i\}$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine einfache bzw. vollständige Zufallsfolge ist. *Tibor Szentmártony.*

Steinhaus, H.: The so-called Petersburg paradox. *Colloq. math.* 2, 56—58 (1949).

Die klassische Regel, welche bei Glücksspielen als unveränderlichen gerechten Spieleinsatz a_n beim n -ten Spiel den Erwartungswert $E(G_v)$ der möglichen Gewinne G_v betrachtet, versagt beim Petersburger Spiel. Hier sind die $G_v = 2^{v-1}$ Einheiten, wenn eine „richtige“ Münze erst beim v -ten Wurf Wappen zeigt, so daß mit der Wahrscheinlichkeit 2^{-v} von G_v : $E(G_v) = \infty$ wird. Nach Angabe eines Glücksspiels, bei welchem die klassische Regel selbst bei $E(G_v) < \infty$ für den Spieler sich als recht unvorteilhaft erweist, gab Feller (*Ann. math. Statist.* 16, 301—304 (1945)] folgende neue Regel an. Die „gerechten“ Einsätze a_n müssen so, möglicherweise — beim Petersburger Spiel notwendigerweise — veränderlich, festgesetzt werden, daß bei Betrachtung der n -gliedrigen Spielfolgen, für $n \rightarrow \infty$ mit gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit das Verhältnis des Reingewinnes zu dem Gesamteinsatz nach dem n -ten Spiel beliebig nahe an 0 liegen soll. Neben dieser Verallge-

meinerung der klassischen Regel im Sinne der schwachen Gesetze der großen Zahlen gibt Verf. — sich auf den ersten Satz seiner im vorangehenden Referat besprochenen Note stützend — folgende, im Sinne eines starken Gesetzes, an. Handelt es sich um Glücksspielfolgen mit den Gewinnen G_n als Zufallsveränderliche ξ , welche die Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt, so ist die Folge $\{a_n\}$ so zu bemessen, daß der Grenzwert der verhältnismäßigen Häufigkeiten jener a_n -Werte, welche kleiner als x sind, $F(x)$ gleich werde. Für das Petersburger Spiel ergibt diese Regel die Folge 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 8, 1, ... der gerechten Spieleinsätze. Sie entsteht aus 1, 1, 1, ..., indem man zwischen dem 1, 3, 5, ...-ten Paar von aufeinander folgenden 1-ern erst lauter 2-er, dann bei den verbleibenden in derselben Weise lauter $2^2 = 4$ -er usw. setzt.

Tibor Szentmártony.

Sapogov, N. A.: Über das Gesetz der großen Zahlen für abhängige zufällige Veränderliche. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **14**, 145—154 (1950) [Russisch].

Verf. betrachtet ein Schema abhängiger zufälliger Größen $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$ ($n = 1, 2, \dots$). $\psi_{ni}(x)$ sei die Randverteilung, $\bar{\psi}_{ni}(x)$ die bedingte Verteilung von x_{ni} für beliebige Werte der anderen Größen. Es soll hier ebenfalls von des Verf. Vereinfachung Gebrauch gemacht werden, x_{ni} durch x_i zu ersetzen. Sei stets $E(x_i) = 0$. Es werden Bedingungen für die Gültigkeit des (schwachen) Gesetzes der großen Zahlen für $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ gegeben (1), z. B.: Es existiert ein p , $1 < p \leq 2$,

so daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p d\psi_i(x) < \infty$ für alle i , $\int_{|x| \geq n^{(p-1)/2(2-p)}} |x| d\bar{\psi}_i(x) = o(1)$ gleichmäßig

für alle x_k , $k < i$, $E(x_i | x_j) \rightarrow 0$ für $|i - j| \rightarrow \infty$ gleichmäßig in i . — Falls für alle i

$|x_i| \leq L$, ist $\frac{1}{n} E\left(x_i \sum_{k=1}^n x_k\right) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig in i für (1) notwendig

und hinreichend. Dies enthält als Sonderfall (x_i alternativ verteilt für jedes i) einen Satz von Bernstein. Weiter werden insbesondere Markoff-Ketten untersucht, wobei x_h nur endlich vieler (k_h) Zustände fähig ist, und eine Reihe Bernsteinscher Sätze ($p = 2$) [Bernstejn (Bernstein), Wahrscheinlichkeitstheorie (russ.), Moskau-Leningrad 1946] verallgemeinert, etwa: (1) gilt, wenn für ein p , $1 < p \leq 2$, der bedingte Erwartungswert $E(|x_h|^p | x_1, \dots, x_{h-1}) < \infty$, $h = 1, 2, \dots$ für die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{j,i}^{(h)} \geq \frac{\lambda(n)}{k_h} > 0$ gilt mit $\lambda = \frac{\varphi(n)}{n^{2-2/p}}$, $\varphi(n)$ monoton $\rightarrow \infty$. —

Im Anschluß an eine Ungleichung von Kolmogoroff (2) [Math. Ann., Berlin **99**, 309—320 (1928)] für unabhängige Variable beweist Verf. Analoges für abhängige und stützt darauf die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen für S_n unter gewissen Bedingungen. Vgl. auch M. Loève, *J. Math. pures appl.* **24** (1945), insbes. 268—285.

Leopold Schmetterer.

Rao, K. S. and David G. Kendall: On the generalized second limit-theorem in the calculus of probabilities. *Biometrika*, Cambridge **37**, 224—230 (1950).

Es sei $\{F^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, welche für alle $n \geq N_j$ endliche, auf $x = 0$ bezogene Momente $\{\alpha_j^{(n)}\}_{j=0}^{\infty}$ von der j -ten Ordnung besitzen. Verff. geben — den von Wintner 1928 sowie von Fréchet und Shohat 1931 mitgeteilten gegenüber — vereinfachte Beweise folgender Sätze an. 1. Bei $F^{(n)}(x) \rightarrow F(x)$ in den Stetigkeitspunkten von $F(x)$ sowie $\alpha_j^{(n)} \rightarrow \alpha_j$ ergibt sich $F(x)$ als eine Verteilungsfunktion mit den Momenten α_j von der Ordnung j . 2. Bei $F^{(n)}(x) \rightarrow F(x)$ in allen Stetigkeitspunkten der als Verteilungsfunktion vorausgesetzten $F(x)$ sowie $|\alpha_j^{(n)}| \leq A_j < \infty$ erweisen sich die sicher vorhandenen Momente α_j von $F(x)$ als Grenzwerte der entsprechenden $\alpha_j^{(n)}$. 3. Aus $\alpha_j^{(n)} \rightarrow \alpha_j$ als Momenten einer einzigen Verteilungsfunktion $F(x)$ folgt $F^{(n)}(x) \rightarrow F(x)$ in den Stetigkeitspunkten von $F(x)$. — Da die normale Verteilung durch ihre Momente

eindeutig festgelegt wird, ergibt sich aus 3. der Tschebyscheff-Markoffsche Satz:

4. aus $\alpha_{2m}^{(n)} \rightarrow (2m)!/(2^m m!)$ und $\alpha_{2m+1}^{(n)} \rightarrow 0$ folgt $F^{(n)}(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^x (2\pi e^{u^2})^{-\frac{1}{2}} du$.

Tibor Szentmártony.

Linnik, Ju. V.: Über eine Frage der Statistik abhängiger Beobachtungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 501—522 (1950) [Russisch].

Es wird ein stationärer Markoff-Prozeß betrachtet $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$; X_{m-1}, X_m seien für jedes m zweidimensional normal verteilt mit $E(X_m) = a$, $E(X_m - a)^2 = \sigma^2$, $\varrho(X_{m-1}, X_m) = \lambda$, $|\lambda| \neq 1$ für alle m . Verf. löst vollständig die (von Kolmogorov gestellte) Aufgabe, Vertrauensgebiete für λ zu konstruieren für die 4 möglichen Fälle des Verhaltens der Parameter a und σ^2 (a bekannt, σ^2 bekannt usw.). Die, wie es scheint, auch praktisch bedeutsame Untersuchung kommt im Ergebnis durchaus mit den Standardverteilungen der Statistik aus (χ^2 , F -Verteilung).

Leopold Schmetterer.

Bochner, S.: Partial ordering in theory of stochastic processes. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 439—443 (1950).

Man ordne jedem Element α einer geordneten Menge einen Hausdorffschen Raum R_α und jedem Paar $\alpha < \beta$ eine Projektion $x_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} x_\beta$ von R_β in R_α mit der Haltbarkeitsbedingung $\varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ für $\alpha < \beta < \gamma$ zu. Im direkten Produkt der R_α gibt es dann eine „diagonale“ Menge $R_\infty = \{x_\mu\}$ mit $x_\mu = \varphi_{\mu\nu} x_\nu$ für $\mu < \nu$, und es kann $x_\alpha = \varphi_{\alpha\infty}^{-1}(\{x_\mu\})$ gesetzt werden. Es bezeichne für jedes α : A_α eine Algebra der Teilmengen von R_α , so daß bei $S_\alpha \in A_\alpha$ und $\alpha < \beta$: $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}(S_\alpha) \in A_\beta$ sei. Gibt es dann über jedem A_α ein endlich additives Maß m_α mit $m_\alpha R_\alpha = 1$ und $m_\beta[\varphi_{\alpha\beta}^{-1}(S_\alpha)] = m_\alpha S_\alpha$, so läßt sich dieses mit denselben Eigenschaften auf die Menge A_∞ der Teilmengen $S_\infty = \varphi_{\alpha\infty}^{-1}(S_\alpha)$ von R_∞ verpflanzen. Ein Maß mit σ -Additivität aber im allgemeinen schon nicht! Als Ersatz wird nun, in Verallgemeinerung eines grundlegenden Satzes von Kolmogoroff (1933) bezüglich einer gewöhnlichen Folge sowie vom Verf. (dies. Zbl. 29, 368) für eine geordnete Menge von euklidischen Räumen, folgender Satz bewiesen. Sind die gegebenen σ -Maße m_α so beschaffen, daß die $m_\alpha S_\alpha$ für geeignete kompakte $F_\alpha \subset S_\alpha$ durch $m_\alpha F_\alpha$ beliebig angenähert werden können, dann ist auch das Grenzmaß $m_\infty S_\infty$ σ -additiv auf einer σ -Hülle von A_∞ . — Als Anwendung zeigt Verf., wie hierdurch seine Betrachtungen über Zufallsvorgänge (a. a. O.) vereinfacht werden können und daß die Fokker-Planksche Differentialgleichung eines Markoffschen Zufallsvorganges mit eindimensionaler zeitartiger unabhängiger Veränderlicher sich auf jene einer Markoffschen Zufallsfunktion mit mehrdimensionaler unabhängiger Veränderlicher verallgemeinern läßt, und zwar bei einem kompakten Riemannschen Raum als Merkmal- oder Wertbereich der Zufallsveränderlichen.

Tibor Szentmártony.

Itô, Kiyosi: Stochastic differential equations in a differentiable manifold. Nagoya math. J. 1, 35—47 (1950).

Es sei $\beta(t, \omega) = \{\beta^i(t, \omega)\}_{i=1}^r$ eine r -dimensionale Brownsche Bewegung mit der Zeitveränderlichen $-\infty < t < \infty$ und der Wahrscheinlichkeitsfeld-Veränderlichen $\omega \in \Omega$. Nach verschiedenen Vorbereitungen befaßt sich Verf. mit der Frage der Lösbarkeit des Systems

$$\xi^i(t, \omega) - \xi^i(s, \omega) = \int_s^t a^i(\tau, \xi(\tau, \omega)) d\tau + \int_s^t b_j^i(\tau, \xi(\tau, \omega)) d\beta^j(\tau, \omega).$$

In diesem bedeuten $\{\xi^i(t, \omega)\}_{i=1}^r$ die örtlichen Koordinaten eines gesuchten Zufallsvorganges $\pi(t, \omega)$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit den Punkten $x = \{x^i\}_{i=1}^r$ und von der Klasse C_2 als Merkmalraum. Die gegebenen $a^i(t, x)$, $b_j^i(t, x)$ ändern sich bei einer Änderung der örtlichen Koordinaten $x \rightarrow \bar{x}$ gemäß

$\bar{a}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} a^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} b_j^k b_j^l$, und $\bar{b}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} b_j^k$. Sie sind für ein „kanonisches Koordinatensystem“ in M beschränkt und stetig in t für jedes x sowie von der Klasse C_1 in x für jedes t . Schließlich ist jede betrachtete Funktion meßbar in (t, ω) und bei $t = t_0$ „eine B -meßbare Funktion von $(\beta(t, \omega), \tau \leq t_0)$ für alle t_0 “ sowie die Integrale in vom Verf. 1944, 1946 eingeführtem Sinne stochastische Integrale. Verf. beweist dann, daß das obige System eine einzige, an ein gegebenes $p(\omega)$ sich anschmiegende Lösung $\pi(t, \omega)$ besitzt. Diese stellt einen einfachen Markoffschen Vorgang dar, und jede beschränkte Funktion $f(\pi(t, \omega))$ der Klasse C_2 genügt der Fokker-Planckschen Gleichung mit der Zeitseite $\lim_{s \rightarrow t} \frac{E[f(\pi(s, \omega)) - f(\pi(t, \omega))]}{s - t}$ und der Raumseite $a^i(t, \xi) \frac{\partial f(\pi(t, \omega))}{\partial \xi^i} + \frac{1}{2} b_k^i(t, \xi) b_k^j(t, \xi) \frac{\partial^2 f(\pi(t, \omega))}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$.

Tibor Szentmártony.

Yosida, Kôzaku: On operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff process. J. math. Soc. Japan 1, Nr. 3, 244—253 (1949).

In einer in derselben Zeitschrift 1948 veröffentlichten Note (dies. Zbl. 37, 353) zeigte Verf. folgendes: Genügen die in einem Banachschen Raum B überall definierten, diesen in sich additiv und stetig abbildenden Operatoren U_t der Halbgruppe $\{U_t\}$, $0 \leq t < \infty$, den Bedingungen $U_t U_s = U_{t+s}$, $U_0 = I$, $\sup_t \|U_t\| \leq 1$, $\lim_{t \rightarrow t_0} U_t = U_{t_0}$, dann ist $U_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t A I_n)$; und zwar mit dem in einem in B dichten Teil vorhandenen Ableitungsoperator $A = \lim_{h \rightarrow 0} (U_h - I)/h$ sowie mit den für $n \rightarrow \infty$ gegen I strebenden und nach $\|I_n\| \leq 1$ beschränkten Operatoren $I_n = (I - A/n)^{-1} = \int_0^\infty n \exp(-nt) U_t dt$. Als Anwendung wird nun folgendes gezeigt: 1. Die zeitlich homogenen — d. h. bezüglich der Zeitpunkte $t_1 < t_2$ nur von $t = t_2 - t_1$ abhängige Übergangswahrscheinlichkeiten zeigenden — Markoffschen Vorgänge werden durch die $\{U_t\}$ der bezüglich eines L -Raumes positiven, normtreuen U_t als Übergangsoperatoren abstrakt dargestellt. So entsprechen den der Verschiebung sowie der Gaußschen bzw. Poissonschen Verteilung zugehörigen

$$U_t x(s) = x(s+t) \text{ sowie } \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-t)^2}{t}\right) x(k) dk \text{ bzw. } e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s-ku)$$

die Ableitungsoperatoren $A = d/ds$ sowie $\frac{1}{4} d^2/ds^2$ bzw. $Ax(s) = \lambda [x(s-u) - x(s)]$. 2. Ist der Vorgang außerdem bezüglich der Werte der eindimensionalen Zufallsveränderlichen, kurz auch räumlich homogen, dann kann die Ableitung des Übergangsoperators in allen Fällen sogar explizit angegeben werden. 3. Da unter gewissen Bedingungen die „Raumglieder“ der Fokker-Planckschen partiellen Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Markoffschen Vorganges durch den Ableitungsoperator eines zeitlich homogenen Vorganges dargestellt werden können, läßt sich die genannte Gleichung in diesen Fällen mit Hilfe der Exponentialdarstellung des entsprechenden Übergangsoperators integrieren. — Man vergleiche mehrere Ausführungen des Verf. mit ihren von Hille in seiner „Functional analysis and semi-groups“ (dies. Zbl. 33, 65) gegebenen lichtvollen Darstellungen.

Tibor Szentmártony.

Siraždinov, S. Ch: Das Ergodenprinzip für inhomogene Markoffsche Ketten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 829—830 (1950) [Russisch].

$M^{(k)} = \|P_{ij}(k)\|$ $i, j = 1, \dots, n$ sei die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten für die in der Überschrift genannten Ketten mit n möglichen Zuständen, $P_{ij}(k, m)$ die Übergangswahrscheinlichkeit nach $m - k$ Schritten. Für alle $M^{(k)}$

ist 1 Eigenwert, und es sei λ_k der Betrag des am nächsten unterhalb 1 liegenden Eigenwertes. Kolmogorov [Uspechi mat. Nauk 5, 52 (1938)] hat vermutet, daß (1) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k) = \infty$ hinreichend ist für das Bestehen des Ergodenprinzips: (2) $|P_{ij}(k, m) - P_{i'j'}(k, m)| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ und $i, i', j, j' = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Verf. zeigt: Für $n = 2$ ist (1) notwendig und hinreichend für (2), falls $n > 2$, nicht hinreichend. (Gegenbeispiel.) Ist Δ_k die Determinante von $M^{(k)}$, ist $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\Delta_k|) = \infty$ für jedes n notwendig für (2). Leopold Schmetterer.

Blanc-Lapierre, André: Quelques modèles statistiques utiles pour l'étude du bruit de fond. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 566—567 (1950).

Die sich auf die Pariser Dissertation sowie auf einen Vortrag des Verf. in Lyon (1948) berufende, für sich kaum verständliche Note gibt drei Sätze über gewisse — im allgemeinen nicht stationäre — Zufallsfunktionen von Zeitpunkten t_i an, welche „eine Poissonsche Verteilung mit der Dichte $\varrho(t)$ “ zeigen. Sie sollen bei der Untersuchung von Grundgeräuschen in elektrischen Geräten, wie z. B. beim Schrotteffekt, bei den Frequenzwechslern usw. eine Rolle spielen. Tibor Szentmártony.

Statistik:

● Hald, A.: Statistics. — A mathematical treatment with applications to engineering and industrial problems. Vol. I. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1950. 654 p. \$ 7,50.

● Hald, A.: Statistics. — A mathematical treatment with applications to engineering and industrial problems. Vol. II: Tables. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1950. \$ 1,50.

Cansado, Enrique: On the application of the moment generating function to unrestricted random sampling. Trabajos Estadíst., Madrid 1, 117—135 und engl. Zusammenfassg. 135—146 (1950) [Spanisch].

The author uses an operational method to derive the well-known formulae for the first four moments of the mean of a sample from a finite population and for their asymptotic values in infinite populations. Stefan Vajda.

Freeman, Murray F. and John W. Tukey: Transformations related to the angular and the square root. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 21, 607—611 (1950).

Verff. geben an Hand von graphischen Darstellungen eine Übersicht über die Ergebnisse ihrer numerischen Untersuchungen (Memorandum Report 24 of the Statistical Research Group, Princeton University, zu beziehen durch das Sekretariat, Box 708, Princeton N. J.) der Wirkung verschiedener, in der Literatur vorgeschlagener Transformationen zur Stabilisierung der Streuung von Beobachtungsdaten aus binomial- oder poissonverteilten Gesamtheiten und der Güte von Näherungsformeln für den durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^K e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Pr \{x \leq k/\text{binomial}, n, p\}$$

als Funktion der Anzahl k der „Erfolge“ und des Erwartungswertes np der Binomialverteilung gegebenen Variablenwert K der Normalverteilung. Insbesondere werden für Beobachtungsdaten, die aus einer poissonverteilten Gesamtheit entstammen, folgende Transformationen verglichen: \sqrt{x} , $\sqrt{x + 1/2}$ [vgl. Bartlett, J. R. statist. Soc., Suppl. 3, 68—78 (1936)], $\sqrt{x + 3/8}$ (vgl. Anscombe, dies. Zbl. 32, 37) und die von den Verff. vorgeschlagene Transformation $\sqrt{x + \sqrt{x + 1}}$ [$\sin^{-1} \sqrt{x/(n+1)} + \sin^{-1} \sqrt{(x+1)/(n+1)}$ für den Fall der Binomialverteilung]. Neben der von Mosteller und Tukey (dies. Zbl. 32, 419)

zur graphischen Ermittlung von K herangezogenen Näherungsformel

$$N = 2(\sqrt{(k+1)q} - \sqrt{(n-k)p})$$

betrachten Verff. noch 7 weitere Näherungsformeln. Von diesen liefern die beiden von ihnen vorgeschlagenen Formeln

$$(1) \quad N^* = N + \frac{(N-2)(N+2)}{12} \left(\frac{1}{\sqrt{np+1}} - \frac{1}{\sqrt{nq+1}} \right),$$

$$(2) \quad N^{**} = N^* + \frac{N^* + 2p - 1}{12\sqrt{E}},$$

wobei E der kleinere von den Werten np und nq ist, sowie eine dritte, die sich aus (2) mit $M = 2\sqrt{n+1}(\sin^{-1}\sqrt{(k+1)/(n+1)} - \sin^{-1}\sqrt{p})$ an Stelle von N^* ergibt, für $|K| \leq 2,5$ bzw. $3,5$ und $np \geq 0,01$ bzw. 1 oder 4 die besten Näherungswerte.

Georg Friede.

Barnard, G. A.: Statistical inference. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 11, 115—139 und Diskussion 139—149 (1949).

Axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeit (W.) mit dem Inversionstheorem als Zentralpunkt in der Gestalt (zwecks Vermeidung der a priori-W.):

Übergewicht von α über α' , bei A — Übergewicht von A über A' , bei α

Übergewicht von α über α' , bei A' — Übergewicht von A über A' , bei α'

Dabei sind A und A' zwei Ergebnisse des Experimentes, für das zur Bestimmung der W.en die beiden Hypothesen α und α' konkurrieren; die Übergewichte (odds) sind die entsprechenden W.-Quotienten. — Ein Ereignis $A\alpha$ ist die Konkretisierung von A im Experiment mit Hypothese α . Bei festem α existiere eine reflexive und transitive Vorwärtsanordnung (forward likelihood) $f \leq: A\alpha f \leq B\alpha$; entsprechend eine Rückwärtsanordnung $b \leq$ (backward likelihood) bei festem A . Verschiedene Experimente seien zusammenfaßbar mit Ereignissen $A\alpha \cdot B\beta$, wobei $f \leq$ (resp. $b \leq$) erhalten bleibt, wenn dies für die gewöhnliche Multiplikation gelten würde. Eine Klasseneinteilung der $A\alpha \cdot A'\alpha$ gemäß $A\alpha \cdot A'\alpha \sim B\beta \cdot B'\beta$ falls (*) $A\alpha \cdot B'\beta f = A'\alpha \cdot B\beta$ führt zu einer geordneten Abelschen, als Archimedisch postulierten Gruppe, so daß es eine Maßzahl (f-lods) $l(A, A'|\alpha)$ gibt mit den Eigenschaften des Logarithmus von W.-Quotienten. Entsprechend liefert $b \leq$ eine Maßzahl λ (b-lods). — Für das Inversionstheorem

$$(**) \quad \lambda(A|\alpha, \alpha') - \lambda(A'|\alpha, \alpha') = l(A, A'|\alpha) - l(A, A'|\alpha')$$

wird die Existenz „absoluter lods“ $l\lambda(A\alpha, B\beta)$ oder die Gültigkeit von

$$\lambda(A|\alpha, \alpha') - \lambda(A'|\alpha, \alpha') = F(l(A, A'|\alpha), l(A, A'|\alpha'))$$

angenommen. — Die Anwendung von (**) im statistischen Schluß setzt die Existenz eines „neutralen Resultates“ E bez. α, α' voraus, für das $\lambda(E|\alpha, \alpha') = 0$ sicher ist. Auf Symmetrieeigenschaften beruhende Beispiele solcher E werden angegeben. Bei Entscheidung zwischen den Zentralwerten μ' und μ'' einer Normalverteilung ist z. B. $x_0 = (\mu' + \mu'')/2$ neutral. Beim Sequenzttest zwischen zwei Hypothesen Θ und Θ' mit W.-Dichten (!) $\varphi(x|\Theta)$ und $\varphi(x|\Theta')$ ist x_0 mit $\varphi(x_0|\Theta) = \varphi(x_0|\Theta')$ neutral. Bei n Beobachtungen wird dann

$$\lambda(x_1, \dots, x_n|\Theta, \Theta') = \sum_i \{\log \varphi(x_i|\Theta) - \log \varphi(x_i|\Theta')\}$$

= logarithmischer likelihood-Quotient, der hier als konstant vorgeschrieben ist an Stelle des Stichprobenumfanges. — Die Ausdehnung der Theorie der lods auf Ereignisse „ A oder B “ durch den Ansatz $l(A \text{ oder } B, C|\alpha) = \psi(l(A, C|\alpha), l(B, C|\alpha))$, wobei ψ assoziativ, kommutativ und mit der lods-Addition distributiv ist, liefert ψ als Addition bei Übergang zu den „odds“ $\{A\alpha|C\alpha\} = \exp l(A, C|\alpha)$. (Die Behauptung, daß durch Axiome über die Erhaltung der Anordnung bei ψ dasselbe eindeutig als Addition definiert sei, ist Ref. unverständlich.) Anschließend Übergang von den odds zu W.en (Vorwärts- und Rückwärtswahrscheinlichkeiten) für Experimente mit endlicher Ereignisdisjunktion. — Obiger statistischer Schluß mit Hilfe des likelihood-Quotienten erscheint als einzig legitimer. — Schlußbemerkungen über die Beziehungen zu verschiedenen statistischen Schlußverfahren. — Diskussion. Anscombe: Wir wissen oft nicht, ob von zwei Hypothesen Θ, Θ' überhaupt eine mit den Beobachtungen vereinbar ist, weshalb die Verteilungsschwänze neben dem likelihood-Quotienten heranzuziehen seien. — Good: Kurzer Abriß der eigenen Theorie [Abstrakte Theorie von W.en $P(E|H)$ mit den üblichen Axiomen; Einführung eines Körpers von Graden des Dafürhaltens $P'(E|H)$; Beziehungsregeln wie Übereinstimmung der Anordnung zwischen den P und P' ; Vorstellungen (suggestions) wie die von der Möglichkeit der Festlegung numerischer Werte für vollkommen gemischte Kartenspiele und solche über zu ziehende Folgerungen], Ablehnung des likelihood-Quotienten als einziger Maßzahl wegen Ignorierung der Vorkenntnisse (ebenso Bartlett). Kendall: Ab-

lehnung der Zweiteilung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Glaubt, daß bei Barnard die Einführung eines spezif. W.-Begriffs und das Multiplikationstheorem im neuen Unabhängigkeitsbegriff (Möglichkeit des Zusammenfassens) für Experimente liegen. [Ref. scheint dagegen der W.-Begriff durch $f \leq$ und das bei entsprechender deterministischer Bewertung ungültige Archimedische Axiom, dagegen das Multiplikationstheorem durch das sonst willkürliche (*) eingebracht zu sein.] Barnard: Die Existenz des neutralen Resultates ist dann sicher, wenn es W.en im üblichen Sinne gibt. — Ref. hält exakte Definition des neutralen E erst nach Definition der W. für möglich (vgl. oben Sequenztest) durch $\Pr(E|\alpha) = \Pr(E|\alpha')$; die Folgerung $\lambda(E|\alpha, \alpha') = 0$ ist jedoch ein logischer Sprung, bei dessen Vermeidung (**) leicht zum üblichen Bayesschen Theorem unter Einbeziehung der a priori-W.en, jedoch ohne Normierung führt.

Hans Richter.

Sherman, B.: A random variable related to the spacing of sample values. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 339—361 (1950).

Ist $F(x)$ die stetig differenzierbare Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen x einer eindimensionalen Gesamtheit, dann ist bekanntlich $y = F(x)$ über $[0, 1]$ gleichmäßig verteilt. Bei einer geordneten Stichprobe $\{x_i\}_{i=1}^n$ ist demnach für große n -Werte eine ziemlich gleichförmige Platznahme (spacing) der $\{F(x_i)\}_{i=1}^n$ innerhalb $[0, 1]$ zu erwarten. Als Abweichungsmaß von einer solchen haben 1932

Smirnoff $(12n)^{-1} + \sum_{i=1}^n [F(x_i) - (2i-1)(2n)^{-1}]^2$ und 1947 Moran bzw. Kimball $\sum_{i=1}^{n+1} [F(x_i) - F(x_{i-1})]^2$ bzw. den von diesem nur durch $(n+1)^{-1}$ abweichenden Wert $\sum_{i=1}^{n+1} [F(x_i) - F(x_{i-1}) - (n+1)^{-1}]^2$ mit $F(x_0) = 0$,

$F(x_{n+1}) = 1$ gewählt. Alle sind Zufallsveränderliche, der ersten gegenüber ist aber die zweite asymptotisch normal verteilt. — Verf. zeigt nun, daß man von der Zufallsveränderlichen $\omega_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \left| F(x_i) - F(x_{i-1}) - \frac{1}{n+1} \right|$ noch mehr zeigen kann. Zunächst ist sie nach Reduktion auf den Mittelwert Null und die Streuung Eins asymptotisch normal verteilt. Für die Prüfung der Annahme, ob eine Gesamtheit die Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt, bildet also auf Grund einer geordneten Stichprobe $\{x_i\}_{i=1}^n$ die Betrachtung der Größe von $[\omega_n - E(\omega_n)]/D(\omega_n)$ ein — asymptotisch gemäß den Bedeutungsstufen der normalen Verteilung verlässliches — Verfahren. Verf. gelingt es aber auch, zu zeigen, daß dies Prüfverfahren der — für Verteilungsanpassungen 1940 von Wald und Wolfowitz geprägten — folgenden Konsistenz- oder Haltbarkeitsbedingung genügt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine falsche Annahme bei diesem Prüfverfahren verworfen wird, strebt bei $n \rightarrow \infty$ gegen Eins.

Tibor Szentmártony.

Faleschini, L.: Alcuni criteri di normalità delle distribuzioni statistiche. Giorn. econ. e Ann. econ., Padova **7**, 63—80 (1948).

Chand, Uttam: Distributions related to comparison of two means and two regression coefficients. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 507—522 (1950).

Verf. vergleicht die Verwendbarkeit der verschiedenen für den Vergleich der Mittelwerte \bar{x}, \bar{x}' zweier unabhängiger, $(n_1 + 1)$ - bzw. $(n_2 + 1)$ -gliedriger Stichproben aus normalen Gesamtheiten mit verschiedenen Varianzen $\sigma_1^2 = K \cdot \sigma_2^2$ und σ_2^2 entwickelten Kriterien: v von B. L. Welch [Biometrika **29**, 350—362 (1938); dies. Zbl. **18**, 226], S von H. Scheffé [Ann. math. Statist. **14**, 35—44 (1943)], d nach Behrens-Fisher [W. V. Behrens: Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen, Landw. Jb. **68**, 807—837 (1929); R. A. Fisher, Ann. Eugenics **6**, 391—398 (1935)] und

$t_k = (\bar{x} - \bar{x}') \cdot [\Sigma(x - \bar{x})^2 + k \cdot \Sigma(x' - \bar{x}')^2]^{-\frac{1}{2}} (n_1 + n_2)^{\frac{1}{2}} \cdot [1/(n_1 + 1) + 1/k(n_2 + 1)]^{-\frac{1}{2}}$ mit beliebigem k [Spezialfälle $k = 1$, $k = K$; $k = n_1(n_1 + 1)/n_2(n_2 + 1)$ ergibt $t_k = v$]. Hierzu werden die Verteilungen der genannten Größen bestimmt und daraus die zugehörigen Potenzfunktionen und Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. Art in

Abhängigkeit von K . Ähnliche Überlegungen werden durchgeführt für die Kriterien, die dem Vergleich zweier Regressionskoeffizienten bzw. dem Vergleich zweier linearer Regressionsfunktionen dienen bei Annahme verschiedener Restvarianzen in den beiden Ausgangsgesamtheiten. *Mia Pia Geppert.*

Taylor, J.: The comparison of pairs of treatments in split-plot experiments. *Biometrika*, Cambridge **37**, 443—444 (1950).

Verf. weist darauf hin, daß sich die von A. A. Aspin (dies. Zbl. **36**, 211) tabellierten Significancegrenzen zur Prüfung der Differenz der Mittelwerte zweier Stichproben aus zwei Gesamtheiten, in denen das Merkmal normal mit verschiedenen Streuungen verteilt ist, zur Lösung folgendes Testproblems verwenden läßt: Für eine Untersuchung werden J Felder (blocks) in je K Beete (plots) unterteilt, die zufällig K ersten Behandlungen unterzogen werden. Danach werden die JK Beete nochmals in L Teilbeete aufgeteilt, die ebenfalls nach dem Zufall L zweiten Behandlungen unterworfen werden. Im Rahmen der Streuungsanalyse des aus dieser Versuchsanordnung gewonnenen Beobachtungsmaterials ist die Significance zwischen Kombinationen von ersten und zweiten Behandlungen, denen verschiedene erste Behandlungen vorausgegangen sind, zu testen. Für den Fall, daß die Tabelle von Aspin nicht ausreicht, wird empfohlen, den t -Test mit einer Anzahl von Freiheitsgraden anzuwenden, die nach einer von B. L. Welch (dies. Zbl. **36**, 211) angegebenen Formel zu berechnen ist. *Georg Friede.*

Bross, Irwin: Two-choice selection. *J. Amer. statist. Assoc.* **45**, 530—540 (1950).

Concerning two populations with different means, the author considers the problem of how large the (equal) sizes of two samples should be, when the population with the larger mean is to be selected. It is assumed that the difference of sample means is normally distributed. Three different criteria are considered: (i) A fixed probability of making the wrong decision when the difference of true means has a given quantity, (ii) minimizing the maximum loss incurred by a wrong decision, and (iii) minimizing the expected loss, when it can be assumed that the true differences between means are normally distributed. In all formulae the relevant population variances are assumed to be known. The author stresses the „pragmatic“ concepts involved in methods (ii) and (iii). They are of course, respectively, fashioned after Wald's „Minimax“ and „Bayes“-solutions of the general decision problem. *Stefan Vajda.*

Špaček, Antonín: Sampling plans for per cent defective, which minimize the maximum of a given risk function. *Časopis Mat. Fys.*, Praha **74**, Nr. 4, 307—308 und tschechische Zusammenfassung. 309 (1950).

Ein Satz von N Serienartikeln mit unbekannter Defekthäufigkeit p wird angenommen bzw. abgelehnt, je nachdem eine zufällige n -gliedrige Stichprobe aus ihm (ohne Zurücklegen) höchstens k bzw. mehr als k Ausschußstücke aufweist. Verf. nennt ein solches Kriterium r, κ optimal, wenn es ein p_0 gibt, für welches die Annahmewahrscheinlichkeit

$$L(p_0, r, \kappa) = \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{r}{j} p_0^j (1-p_0)^{r-j} \geq 1 - \varepsilon$$

mit gegebenem $0 < \varepsilon < 1$ erfüllt, und wenn das Maximum der Risikofunktion

$$R(p, n, k) = n/N + (a/c) \cdot (1 - n/N) \cdot p \cdot L(p, n, k)$$

bezüglich p für $n = r$, $k = \kappa$ minimal ist, wo c die Inspektionskosten für 1 Stück und a den Verlust bei Abnahme eines Defektstückes bedeutet; es wird ein Verfahren zur Bestimmung des optimalen r, κ angegeben. *Mia Pia Geppert.*

Kossack, Carl F.: Some techniques for simple classification. *Proc. Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability* (August, 1945 and January, 1946), 345—352 (1949).

Entsprechend dem Vorgehen von A. Wald [Ann. math. Statist. **15**, 145–162 (1944)] im multivariablen Fall behandelt Verf. das Problem der Zuordnung einer einvariablen Beobachtung z zu einer von zwei normal verteilten Ausgangsgesamtheiten π_1 und π_2 mit den Mittelwerten ν_1 und ν_2 und den Streuungen σ_1^2 und σ_2^2 . Die einzige verfügbare Kenntnis über diese Gesamtheiten besteht dabei in einer Zufallstichprobe vom Umfang N_1 aus π_1 und einer eben solchen Stichprobe vom Umfang N_2 aus π_2 . Für die Fälle I. $\sigma_1 = \sigma_2, \nu_1 \neq \nu_2$, II. $\nu_1 = \nu_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ und III. $\nu_1 \neq \nu_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ verwendet Verf. dabei zur Testung der Hypothese H_1 , daß z zu π_1 gehört gegenüber der Hypothese H_2 , daß z der Gesamtheit π_2 entstammt, den Wahrscheinlichkeitsverhältnistest, der hierfür am leistungsfähigsten ist. Dabei approximiert er die Begrenzung des jeweiligen kritischen Bereichs durch eine Funktion der aus den Stichproben gewonnenen Schätzwerte \bar{x}, \bar{y}, s_1 und s_2 für ν_1, ν_2, σ_1 und σ_2 . Zu vorgegebenen Werten des Fehlers erster Art wird der zugehörige Fehler zweiter Art für verschiedene Werte der Differenz $\lambda = \bar{x} - \bar{y}$ der Stichprobenmittelwerte und des Verhältnisses $h = s_2/s_1$ der Stichprobenstreuungen tabelliert und an Hand dieser Tabelle das Verhalten der Fehler bei Änderungen von λ und h diskutiert.

Georg Friede.

Hartley, H. O.: The maximum F -ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance. *Biometrika*, Cambridge **37**, 308–312 (1950).

As a simpler alternative to Bartlett's test for homogeneity of variances in a given set, the author suggests the use of the ratio of the extreme variance estimates, provided that all of them are based on the same number of degrees of freedom. He derives his test from the approximately normal distribution of the logarithms of the variance estimates and shows how the resulting approximate test can be improved. A table is provided of the 5% points for a set of k ($= 2, \dots, 12$) mean squares and n ($= 2, \dots, 10, 12, 15, 20, 30, 60, \infty$) degrees of freedom. Under certain assumptions regarding the type of heterogeneity to be detected, the power of the test is shown to be not much smaller than that of Bartlett's test.

Stefan Vajda.

Barnard, G. A.: On the Fisher-Behrens test. *Biometrika*, Cambridge **37**, 203–207 (1950).

The author starts with an exposition of some results due to H. Ruben and C. Stein, explaining how confidence intervals with prescribed maximum length l and confidence level α can be found for the mean μ of a normal population with unknown variance σ^2 . The procedure consists in asserting

$$\bar{x} - t_\alpha s / \sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_\alpha s / \sqrt{n}$$

where \bar{x} is the mean of n observations, s^2 is the estimate of σ^2 from n' observations and n and n' are connected by the condition that $n - 1 < 4 t_\alpha^2 s^2 l^2 \leq n$ with t_α as the α -point of the t -distribution with $n' - 1$ degrees of freedom. — From this the author deduces that Fisher's test for the equality of two population means without assuming equality of population variances (the so-called Fisher-Behrens test) based on $d = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s_1^2 n_1 + s_2^2 n_2}$ can be given a „frequency interpretation“, i. e. the frequency of errors of the first kind of the Neyman-Pearson theory will be correctly given by the distribution function of d (apart from unessential approximations); it is only necessary to take as the reference set of repeated events not all those for which n_1 and n_2 are fixed, but the sub-set for which $\sqrt{n_1} s_1$ and $\sqrt{n_2} s_2$ are also those of the observed samples. — The importance of this paper does not lie so much in this particular illustration as in the fact that it is one of a series of articles in which the author expresses the view that the Neyman-Pearson theory errs in fixing a reference set in an arbitrary manner and that, in fact, that theory should be rejected in favour of Fisher's approach, where no reference set is assumed. *Stefan Vajda.*

Walsh, John E.: Some nonparametric tests of whether the largest observations of a set are too large or too small. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **21**, 583—592 (1950).

Auf Grund einer Reihe von Sätzen über Ordnungsparameter, deren Beweise teilweise auf früheren Resultaten des Verf. (dies. Zbl. **33**, 76) fußen, werden einige parameterfreie, auf dem Gebrauch der r größten Stichprobenwerte beruhende Tests konstruiert, die die Hypothese prüfen, daß die symmetrischen kontinuierlichen Gesamtheiten, denen n Werte unabhängig entnommen sind, gleichen Medianwert haben, bzw. die Hypothese, daß die kontinuierlichen Gesamtheiten mit gleichem Medianwert, denen die n Werte unabhängig entnommen sind, symmetrisch seien. Es werden zusätzliche Bedingungen angegeben, unter welchen das Signifikanzniveau der betrachteten Tests mit $n \rightarrow \infty$ gegen einen Wert α konvergiert und für kein n den Wert 2α überschreitet. Unter der speziellen Annahme, daß die r größten Stichprobenwerte aus Populationen mit gleichem Medianwert Θ , alle übrigen aus solchen mit gleichem Medianwert Φ stammen und daß für jede Population die Verteilung der Abweichung der Variablen von ihrem Medianwert von letzterem unabhängig sei, wird die Potenzfunktion (power function) untersucht und bewiesen, daß sie bei Prüfung der Hypothese $\Theta > \Phi$ gegen 0 geht, wenn $(\Theta - \Phi) \rightarrow -\infty$, und gegen 1, wenn $(\Theta - \Phi) \rightarrow \infty$.
Mia Pia Geppert.

Paull, A. E.: On a preliminary test for pooling mean squares in the analysis of variance. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **21**, 539—556 (1950).

Consider an Analysis of Variance with entries „Between groups“, „Within groups, between subgroups“ and „Within subgroups“. The author studies the power function of a test which consists in deciding, on a given level, whether to pool the variances of the last two items and then, on the same or some other level, testing the differences between groups. The argument is demonstrated by a numerical example and by graphs and the overall picture is also described in non-mathematical terms, partly based on conjectures. When the degrees of freedom each exceeds six, the author recommends to pool if the ratio of the mean squares of the last two items is less than 2, and adds another rule for smaller degrees of freedom.

Stefan Vajda.

Durbin, J. and G. S. Watson: Testing for serial correlation in least squares regression. I. *Biometrika*, Cambridge **37**, 409—428 (1950).

The authors wish to derive a test of independence of the error terms ε_i in a regression model $y = X\beta + \varepsilon$, where y , β and ε are vectors and X is a matrix. The test is based on a statistic $r = z'A/z/z'z$, where z is the vector $z = y - Xb$, b being the least squares estimate of β . Approximate statements are made about the distribution of r and about the appropriate choice of the matrix A . One will have to wait for the promised sequel to this paper, to see how the test is supposed to be used.

Stefan Vajda.

Chakrabarti, M. C.: A note on balanced incomplete block designs. *Bull. Calcutta math. Soc.* **42**, 14—16 (1950).

Für den Fall, daß bei der Planung von Züchtungsuntersuchungen v Sorten auf b Felder (Blocks) zu je k Beeten (plots) verteilt werden sollen, wobei jede Sorte r -mal und jedes Paar von Sorten λ -mal vertreten sein soll, so daß also gilt: $vr = bk$; $\lambda(v-1) = r(k-1)$, beweist Verf.: 1. die Ungleichung $b \geq v$; 2. auf einfacherem Wege das von M. P. Schützenberger (dies. Zbl. **35**, 88) erhaltene Ergebnis, daß eine symmetrische, ausgewogene, unvollständige Feldplanung mit einer geraden Anzahl von Sorten nicht möglich ist, wenn $(r-\lambda)$ nicht eine Quadratzahl ist; 3. daß, wenn l_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, b$) die Anzahl der dem i -ten und dem j -ten Feld gemeinsamen Sorten ist, die Determinante $|l_{ij}| = 0$ für $b > v$ ist und $= r^2(r-\lambda)^{v-1}$, wenn $b = v$ ist.

Georg Friede.

Chung, J. H.: Sequential sampling from finite lots when the proportion defective is small. *J. Amer. statist. Assoc.* **45**, 557—569 (1950).

The author derives approximate formulae (too long to be quoted here) for the probability ratio in a sequential test for fractions defective in finite populations, when these fractions are small and therefore the sample has to be relatively large, so that binomial approximations become unsuitable. A worked out example is attached.

Stefan Vajda.

Bose, R. C.: On a resolvable series of balanced incomplete block designs. *Sankhyā, Calcutta* **8**, 249—256 (1947).

Es handelt sich um rechteckige, durch Zufallsauswahl zustande kommende Schemata für die Vergleichung der Ergebnisse einer Anzahl v von Versuchsanordnungen, deren jedes k Ergebnisse enthält, wobei $k < v$. Wenn die Schemata gewissen detaillierten Vorschriften genügen, nennt man sie balanced incomplete block designs. Verf. verschärft eine von Fisher gegebene Ungleichung und ermittelt für einen Sonderfall eine Reihe von Beziehungen zwischen den Parametern, welche ihn kennzeichnen.

Paul Lorenz.

Johnson, N. L.: On the comparison of estimators. *Biometrika, Cambridge* **37**, 281—287 (1950).

*Für die vergleichsweise Beurteilung der Güte verschiedener Schätzungen eines statistischen Parameters sind verschiedene Verfahren entwickelt worden. Jedes derselben basiert auf einer Grundidee, welche Eigenschaften der Schätzung als wesentlich betrachtet werden sollen. Verf. diskutiert das „Genauigkeitskriterium“ von Pitman und den mittleren quadratischen Fehler. Die Diskussion setzt die Kenntnis der Untersuchungen von Nicholson [*Biometrika, Cambridge* **32**, 16—28 (1941), **33**, 59—72 (1943)] voraus. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die Beurteilung mit Hilfe des mittleren quadratischen Fehlers etwas genauer zu sein scheint. Dazu kommt, daß dieses Kriterium die Schätzungen in eine eindeutige Rangordnung bringt, während nach Pitmans Kriterium eine Schätzung Y_1 genauer sein kann als Y_2 , diese genauer als Y_3 und doch Y_3 wieder genauer als Y_1 .

Paul Lorenz.

Stein, Charles: Unbiased estimates with minimum variance. *Ann. math. Statist., Baltimore Md.* **21**, 406—415 (1950).

Es sei R ein Raum, B eine ihn enthaltende additive Klasse μ -meßbarer Teilmengen C von R und $p(x|\theta)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsveränderlichen $X \in R$ mit dem Parameter $\theta \in \Omega$. Es sei ferner sowohl $\pi(x|\theta) = p(x|\theta)/p(x|\theta_0)$ für fast alle x und θ , als auch mit $v(C) = \int_C p(x|\theta_0) d\mu(x)$ für alle θ_1, θ_2 das

Integral $A(\theta_1, \theta_2) = \int_R \pi(x|\theta_1) \pi(x|\theta_2) dv(x)$ endlich. Der Hauptsatz der Note

zeigt folgendes. 1. Gibt es — gemäß $E(f(X)|\theta) = \int_R f(x) p(x|\theta) d\mu(x) = g(\theta)$ —

überhaupt eine erwartungstreue Schätzung $f(x)$ von $g(\theta)$, dann gibt es im wesentlichen eine einzige $f^*(x)$, welche das kleinstmögliche Streuungsquadrat $E([f^*(X) - g(\theta_0)]^2 | \theta_0)$ bei θ_0 besitzt. 2. Eine Schätzung f kann dann und nur dann eine solche sein, wenn es ein reellwertiges Funktional T über die Klasse der durch

$\int_R \varphi(x) \pi(x|\theta) dv(x)$ bei allen $\int_R [\varphi(x)]^2 dv(x) < \infty$ darstellbaren Funktionen von θ

gibt, so daß $TA(\theta, \theta_1) = g(\theta_1)$ für alle $\theta_1 \in \Omega$ und $T \int \varphi(x) \pi(x|\theta) dv(\theta) =$

$\int \varphi(x) f(x) dv(x)$ für alle genannten φ wird. Das kleinstmögliche Streuungsquadrat ist dann eben $Tg(\theta) - [g(\theta_0)]^2$. — Für die Existenz und Darstellung von f^* geben dann zwei Folgesätze — leider noch immer unhandliche — hinreichende Bedingungen bezüglich $\pi(x|\theta)$ und $g(\theta)$. — Abschließend wird die Anwendbarkeit der Resultate für sequentielle Schätzungen sowie ihre Beziehung zu den entsprechenden Ergebnissen von Bhattacharyya, Blackwell und Wolfowitz angedeutet.

Tibor Szentmártony.

Wold, Herman O. A.: Statistical estimation of economic relationships. *Econometrica*, Chicago 17, Suppl. 1—21 und französ. Zusammenfassg. 21—22 (1949).

The author starts with a survey of the difficulties in applying mathematical models to economic data. His main remarks refer to a linear recursive system

$$x_i(t) = c_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}^{(0)} x_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} x_j(t-1) + \cdots + \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(s)} x_j(t-s) + y_i(t),$$

which is the „model-sequence“ system studied by Tinbergen. The author proves a theorem which shows that such a system can serve as a model for very general economic structures and mentions the result proved in an earlier paper [Bentzel and Wold, *Skand. Akuarietidskr.* 29, 95—114 (1946)], that if the residuals $y_i(t)$ have zero means and are uncorrelated, then the least-square estimates of the coefficients are free from a bias which was exhibited by Haavelmo [*Econometrica* 11, 1—12 (1943)] for more general systems.

Stefan Vajda.

Anderson, T. W. and Herman Rubin: The asymptotic properties of estimates of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 21, 570—582 (1950).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 33, 80) gaben Verff. eine Methode an zur Schätzung der Koeffizienten einer einzelnen Gleichung in einem vollständigen System linearer stochastischer Gleichungen. Jetzt untersuchen sie die Konsistenz dieser Schätzungen und ihre asymptotischen Verteilungen unter allgemeineren Voraussetzungen. Es werden Voraussetzungen angegeben, unter denen die Schätzungen konsistent sind, selbst wenn die Störungen nicht normal verteilt sind und wenn einige Variablen vernachlässigt werden bzw. das Gleichungssystem nicht linear ist. Unter bestimmten Voraussetzungen wird für die Schätzungen asymptotische Multinormalverteilung nachgewiesen und die zugehörige asymptotische Kovarianzmatrix angegeben. Ferner wird bewiesen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die früher aufgestellten Kriterien für die Anzahl der Koordinaten mit Koeffizienten 0 asymptotisch χ^2 -Verteilungen folgen und daß die früher angegebenen Mutungs-(Confidenz-)bereiche konsistent bleiben und asymptotisch dem gleichen Confidenzniveau entsprechen, wenn auch auf scheinbar wesentliche Voraussetzungen verzichtet wird.

Mia Pia Geppert.

Stone, J. R. N.: Prediction from autoregressive schemes and linear stochastic difference systems. *Econometrica*, Chicago 17, Suppl. 29—37 und französ. Zusammenfassg. 37—38 (1949).

Verf. untersucht die Leistungsfähigkeit eines Systems von k miteinander durch ebenso viele stochastische Differenzengleichungen verbundenen Zufallsvariablen, für das eine Beobachtungsreihe vorliegt, für die Vorhersage zukünftiger Werte, wobei er als Maß die Streuung dieser Werte verwendet. Ein solches System von Differenzengleichungen läßt sich durch Elimination in ein autoregressives Schema der Form (1) $a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \cdots + a_k x_{t-k} = \varepsilon_t$ mit $a_0 = 1$ überführen, wobei die Zufallskomponenten ε_t in der Regel untereinander korreliert sind. Aus (1) läßt sich leicht die Streuung der Vorhersage für alle Zukunft, $\mu_0 = E(x_t^2)$, als Funktion von σ_ε^2 oder mit $E(x_{t-i}, \varepsilon_t) = \rho_i$ ($i > 0$) als Funktion der a_i und ρ_i erhalten. Für ein Beispiel [$k = 2, \rho_i = 0$ ($i = 1, 2$)] gibt Verf. eine graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses $\Phi = \mu_0/\sigma_\varepsilon^2$ von den Koeffizienten a_1 und a_2 des autoregressiven Schemas an. Da sich x_t stets in der Form

$$(2) \quad x_t = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_n \varepsilon_{t-n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

darstellen läßt, wobei die b Funktionen der Koeffizienten a sind, die im Fall eines stationären Prozesses konvergieren, ergibt sich bei Unabhängigkeit der ε für einen solchen Prozeß, daß $\sigma_{(x)}^2 = \sum_{i=0}^n b_i^2 \sigma_\varepsilon^2 = \mu_0$ ist, d. h., daß die Streuung $\sigma_{(x)}^2$ der Reihe x_t in der Vergangenheit gleich der Streuung μ_0 einer Vorhersage für die ferne Zu-

kunft ist. Dieses bedeutet aber, daß eine solche Vorhersage eine äußerst geringe Leistungsfähigkeit besitzt, wenn nicht σ_ε sehr klein ist. Praktisches Interesse haben daher nur die Vorhersagen für die nächste Zukunft. Für die schrittweise Berechnung der zugehörigen Streuungen gibt Verf. ein einfaches Verfahren an. Abschließend wird an einem Beispiel gezeigt, wie sich die Vorhersageleistungsfähigkeit hinsichtlich jeder Variablen eines Systems von linearen stochastischen Gleichungen dadurch erhalten läßt, daß man zunächst die Koeffizienten und Fehlerstreuungen der reduzierten Form und dann für das zugehörige autoregressive Schema bestimmt, um dann die in der vorliegenden Arbeit angegebenen Verfahren zur Ermittlung der Vorhersagestreuung anzuwenden.

Georg Friede.

Kendall, Maurice G.: The estimation of parameters in linear autoregressive time series. *Econometrica*, Chicago 17, Suppl. 44—56 und französ. Zusammenfassg. 56—57 (1949).

The author illustrates four methods of estimating the coefficients of the autoregressive equation

$$(*) \quad \alpha_0 u_{t+k} + \alpha_1 u_{t+k-1} + \dots + \alpha_k u_t = \varepsilon_{t+k},$$

where the ε 's are random variables. These methods use 1. the first k equations $\sum_j \alpha_j r_{k-l-j}$, where the r 's are the sample correlation coefficients of the u 's (due to Yule), 2. all available equations of this type, 3. $\sum_i A_i r_{j-i}$, where A_i is the coefficient of t^i in the expansion of $(\sum_j \alpha_j t^j) (\sum_j \alpha_j t^{-j})$, 4. $\sum_i B_i r_{j-i}$, where B_i is the coefficient of t^i in $(\sum_j \alpha_j t^j)^2$. — The examples use artificial series constructed by the author (compare his „Contributions to the study of oscillatory time-series“, Cambridge 1946) for $k = 2$ and rectangular ε 's. The best results are produced by method 1. but, as the author remarks, there is no apparent reason why this should always be so. Finally, the author adds a few theoretical comments.

Stefan Vajda.

Daniel, Cuthbert and Nicholas Heerema: Design of experiments for most precise slope estimation or linear extrapolation. *J. Amer. statist. Assoc.* 45, 546—556 (1950).

Verff. stellen fest, daß mit der Schätzung der Neigung und der linearen Extrapolation für den Fall der linearen stochastischen Abhängigkeit der Messungen Y von den Werten einer Variablen x verbundene Probleme, insbesondere das Problem der Planung, trotz ihrer praktischen Bedeutung bisher wenig Beachtung in der statistischen Literatur gefunden haben. Sie untersuchen die für die Durchführung einer solchen Schätzung bzw. Extrapolation wesentlichen Fragen nach den besten Werten von x , für die die zugehörigen Y -Werte zu messen sind, und der besten Verteilung der insgesamt N vorzunehmenden Messungen auf die gewählten x -Werte. Sie gehen dabei von folgenden Voraussetzungen aus: (1) Die Beziehung zwischen x und Y in der Ausgangsgesamtheit ist im jeweils betrachteten Bereich als linear bekannt; (2) der mittlere Fehler σ_y von Y ist eine bekannte Funktion von x ; (3) die x -Werte sind beliebig wählbar und können genau festgelegt werden; für sie lassen sich voneinander unabhängige Messungen von Y durchführen; (4) der Punkt x_e , dessen Y -Wert extrapoliert werden soll, ist von vornherein bekannt. Ihre Untersuchungsergebnisse für spezielle Beziehungen zwischen σ_y und x ($\sigma_y = \text{konst.}, = c x + d$ u. a.) haben Verff. für die Schätzung der Neigung und die Extrapolation jeweils in einer Tabelle mit Angabe der entsprechenden Streuung und der Leistungsfähigkeit der optimalen Versuchsanordnung gegenüber anderen zusammengestellt. Während die jeweiligen optimalen Werte für x — in den betrachteten Fällen sind es stets zwei — bei beiden Problemen die gleichen sind, hängt die optimale Aufteilung der N Messungen beim Extrapolationsproblem von der Lage des Punktes x_e ab.

Georg Friede.

Dwina, S.: Eine Ableitung des Fehlergesetzes von Laplace-Gauß. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. 8, 12—18 (1948).

Ogawa, Junjiro: Note on the Markoff's theorem on least squares. *Osaka math. J.* 2, 145—150 (1950).

Mittels Anwendung des Matrizenkalküls gibt Verf. einen vereinfachten Beweis des Satzes (Verallgemeinerung nach Neyman-David eines Markoffschen Satzes), der für den Fall linear bedingter Beobachtungen die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate als die „beste Schätzung“ erklärt. *Bruno de Finetti.*

Chiassino, G.: Considerazioni sull'interpolazione statistica. *Ann. Ist. stat. Univ.*, Bari 23, 59—66 (1947).

Georgescu-Roegen, Nicolae: Further contribution to the scatter analysis. *Econometrica*, Chicago 17, Suppl. 39—41 und französ. Zusammenfassg. 42—43 (1949).

Unter gewissen — unklar formulierten — Bedingungen werden Verfahren zur Bestimmung der ausgeglichenen Werte der Koeffizienten in einer Beziehung $\sum_k A_k X^k + \sum_l B_l Y^l + C = 0$ der dem Zufall unterworfenen korrelierten oder unkorrelierten bzw. gewöhnlichen Veränderlichen X^1, \dots, X^n bzw. Y^1, \dots, Y^m auf Grund eines durch Beobachtung ermittelten Streuungsbildes skizziert. Sie können ohne Vorbehalt nicht zur Kenntnis genommen werden. *Szentmártony.*

Haldane, J. B. S.: The precision of observed values of small frequencies. *Biometrika*, Cambridge 36, 297—300 (1948).

Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Lanoix, V.: Note sur l'ajustement d'une table de mortalité d'après la loi de Makeham et par: 1° La méthode des moments. 2° La méthode des moindres carrés. *Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français* 61, 377—404 (1950).

Verf. vergleicht die Momentenmethode und die der kleinsten Quadrate, indem er sie nebeneinander auf die Ausgleichung der Tafeln AF und RF anwendet. Das erste Moment ergibt einen Näherungswert für die Makeham-Konstante c ; die Methode der Iterationen und die Newtonsche dienen zur Verbesserung. Verf. stellt fest, daß es bei der Momentenmethode überflüssig ist, den Daten Gewichte zu verleihen. Auch die von ihm modifizierte klassische Methode führt er ohne Gewichte durch. Ergebnis: Die Summe der Fehlerquadrate ist bei der modifizierten Methode der kleinsten Quadrate $83,388 \cdot 10^{-6}$, nach der Momentenmethode $84,097 \cdot 10^{-6}$, bei der ursprünglichen Tafel war sie $86,371 \cdot 10^{-6}$, nach der Verbesserung durch Galbrun $86,247 \cdot 10^{-6}$ (in den beiden letzteren Fällen war die Ausgleichung mit Gewichten erfolgt). — Verf. leitet noch die Formeln für die Ausgleichung bei Überlebensordnungen 2. Ordnung (mit 5 Konstanten) durch, jedoch ohne Anwendung auf die Tafeln, die sinnlos übergenau wäre. *Hasso Härten.*

Delaporte, Pierre: Construction de tables de mortalité et de survie de générations à partir de la surface de mortalité. *Trabajos Estadist.*, Madrid 1, 273—278 und spanische Zusammenfassg. 278 (1950).

Ist $q(x, t)$ die Sterbewahrscheinlichkeit für Alter x und Zeitpunkt t , so wird die Fläche $z = q(x, t)$ (x, t, z Cartesische rechtwinklige Koordinaten) „Sterblichkeitsfläche“ genannt; die Durchschneidungen $t = \theta = \text{konst.}$ bzw. $t - x = \theta = \text{konst.}$ geben die gewöhnlichen Sterbetafeln für gleichzeitig Lebende bzw. Geborene. Es werden die graphische Darstellung mittels Niveaulinien empfohlen und diesbezügliche graphische Interpolationsverfahren beschrieben. *Bruno de Finetti.*

Jecklin, Heinrich: Elementary generalizations upon Lidstone's approximation for two joint lives. *J. Inst. Actuar.*, London 76, 253—258 (1950).

Zusammenfassung der Ergebnisse, die Verf. in verschiedenen Arbeiten veröffentlicht hat [z. B. dies. Zbl. 38, 301 und Bl. Deutsche Ges. Vers.-Math. 1, Heft 2,

3—16 (1951)], wobei er besonders den Dualismus zwischen der additiven Lidstone-Approximation und ihrem multiplikativen Gegenstück hervorhebt. Die Lidstone-Näherung wird auf Reserven, Einmalprämien, Rentenbarwerte ausgedehnt, ferner auf die versicherungstechnischen Werte von drei verbundenen Leben. Die Güte der verschiedenen Approximationen wird an Beispielen erprobt. *Hasso Härten.*

Hymans, J. C. S.: A note on generalized equations for sickness rates. *J. Inst. Actuar.*, London **76**, 259—262 (1950).

In einer früheren Arbeit mit R. C. B. Lane hat Verf. die Krankheitsraten durch die Überlagerung von zwei Gompertz-Kurven dargestellt, die eine — akuten Krankheiten entsprechend — schnell abnehmend, die andere — chronischen Erkrankungen entsprechend — sehr viel langsamer abnehmend. Verf. verallgemeinert die früheren Ergebnisse, indem er n - statt 2-gliedrige Krankheitsraten annimmt, ferner die Potenzen α^r und β^r durch allgemeine Funktionen $f_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ersetzt. *Hasso Härten.*

Bartolozzi, Giuseppe: Sulle rendite vitalizie frazionate a rata costante. *Archimede*, Firenze **1**, 160—162 (1949).

Haafte, M. van: L'age limite ω .

Zwigg, E.: Replique. *Verzekerings-Arch.* **28**, 1—14 (1949).

Gillman, Leonard: Operations analysis and the theory of games: advertising example. *J. Amer. statist. Assoc.* **45**, 541—545 (1950).

Analyse de la lutte publicitaire entre deux firmes rivales, l'une prospère, B , l'autre L , au bord de la faillite, pour conquérir une couche importante et inattendue de clients nouveaux. On suppose que B répartit son effort sur toute la durée de la campagne, alors que L concentre ses ressources dans un appel unique à la clientèle, lancé au moment optimum. L'A. fait diverses suppositions (hypothétiques) sur les réactions de l'acheteur à la publicité. Il introduit les „susceptibility-functions“ $B(t)$ et $L(t)$. $B(t)$ est la probabilité pour qu'une unité de monnaie dépensée par B en publicité au temps t s'empare du client, s'il est disponible à cet instant; $L(t)$ est la probabilité pour que l'annonce unique de L , fait au temps t , décide alors l'acheteur, s'il n'a pas encore traité. Discussion de la meilleure stratégie pour B et pour L . Exemple numérique. *Albert Sade.*

Amoroso, Luigi: Prices and money. *Econometrica*, Chicago **17**, Suppl. 334—340 und französ. Zusammenfassg. 340 (1949).

Verf. unterscheidet Preisschwankungen, die ihren Ursprung im Geldsektor haben und die Struktur des Marktes nur mittelbar beeinflussen, von solchen, die Änderungen innerhalb eines Wirtschaftszweiges entspringen, die Marktstruktur unmittelbar ändern und dadurch eine Änderung des Geldwertes herbeiführen können. Inflation ist eine monetäre Erscheinung, Deflation eine strukturelle. Die Marktstruktur wird durch die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0$ dargestellt, wo p_i die Preise und $X_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ihre Ableitungen sind, von welchen letzteren angenommen wird, daß sie die Zeit nicht explizit enthalten. Diese Strukturgleichung ist für alle Preisrelationen charakteristisch, welche von Zeit und Geld unabhängig sind. Der Zusammenhang mit Geld wird erhalten, indem man eine weitere Gleichung für das allgemeine Preisniveau p einführt, $\frac{p'}{p} = \alpha_1 \frac{p'_1}{p_1} + \alpha_2 \frac{p'_2}{p_2} + \dots + \alpha_n \frac{p'_n}{p_n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, mit der Bedingung $p = 1$, wenn alle $p_i = 1$ sind, also integriert $\log p = \alpha_1 \log p_1 + \alpha_2 \log p_2 + \dots + \alpha_n \log p_n$. So lange der Wert des Geldes nicht eingeführt wird, sind durch diese Gleichungen alle Preissysteme bestimmt, die mit der Struktur des Marktes vereinbar sind. *Hasso Härten.*

Divisia, F.: Une présentation géométrique du double équilibre du change et du commerce international. *Econometrica*, Chicago 17, Suppl. 98—107 und engl. Zusammenfassg. 107—108 (1949).

Seien p_a und p_f die Preise in den Ländern a und f , solange kein Handel zwischen ihnen besteht, sie sich also lediglich aus den inneren Angebot- und Nachfragekurven ergeben; p'_a und p'_f die Preise, die sich unter dem Einfluß des Warenaustausches bilden. Das Land a liefere an f die Warenmenge q , so daß f einen Bedarf $d = q \cdot p'_a$ der Währung von a hat. Sei L der Kurs dieser Währung in f , dann definiert Verf. die Größe $y = p_f/p_a - L - t/p_a$, wo t die Kosten des Warentransfers sind. q ist eine wachsende Funktion von y , p'_a von q , also auch von y , $d = q \cdot p'_a$ also ebenfalls eine wachsende Funktion von y . Unter der von Verf. als grob bezeichneten Annahme $d = K y$ (K = konstant, also $q \cdot p'_a$ nur von y abhängig, d. h. nur von den ursprünglichen Werten p_a , p_f , sowie L und t , nicht von p'_a und p'_f) ergibt sich eine graphische Darstellung der Handelsbilanz mit Hilfe einer Treppenkurve: die Waren werden nach der Größe des Wertes p_f/p_a geordnet, wobei diese Werte Ordinaten der Stufen sind, die zugehörigen K die jeweiligen Breiten. Diese Treppenkurve ist (unter der erwähnten Annahme!) nur von der inneren wirtschaftlichen Struktur der beiden Länder abhängig. Die von der Treppenkurve und den Parallelen zur Abszisse mit Ordinaten $L + t_i/p_a$ und $L - t_e/p_a$ (wo t_i und t_e die Transferkosten für Export und Import sind) eingeschlossenen Flächen sind bei Gleichgewicht der Handelsbilanz inhaltsgleich. Bei Betrachtung der Zahlungsbilanz sind zusätzliche Flächen entsprechend den fälligen Forderungen und Schuldzahlungen nötig.

Hasso Härten.

Baker, J. G.: The universal discount as a means of economic stabilization. *Econometrica*, Menasha 16, 155—184 (1948).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Kagan, V. F.: Die Entwicklung der Interpretationen der nichteuklidischen Geometrie. Trudy Sem. vektor. tensor. Analisu, Moskva-Leningrad 7, 187—204 (1949) [Russisch].

Im Inneren des Einheitskreises K kann man bekanntlich auf 2 verschiedene Weisen die hyperbolische Geometrie realisieren, einmal so, daß die Geraden, und einmal so, daß die Orthogonalkreise von K zu geodätischen Linien werden. Verf. hat nun die bemerkenswerte Entdeckung gemacht, daß diese beiden, mit W_1 und W_2 zu bezeichnenden Deutungen nur die Anfangsglieder einer unendlichen Kette derartiger Interpretationen W_n sind. Bei W_n werden die hyperbolischen Geraden durch die im Inneren von K liegenden Stücke gewisser Kurven n -ten Grades dargestellt, die durch die Gleichungen $ax + by = \varepsilon \frac{Q_n(x^2 + y^2)}{P_n(x^2 + y^2)}$ beschrieben werden, wobei $Q_n(\varrho^2) = \frac{1}{2} [(1 + \varrho)^n + (1 - \varrho)^n]$, $P_n(\varrho^2) = \frac{1}{2} [(1 + \varrho)^n - (1 - \varrho)^n]$ und $\varepsilon = 0$ oder 1 ist, je nachdem die Kurven durch den Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 - 1 = 0$ gehen oder nicht. Für jedes n entarten die Kurven somit in Geraden, sofern sie durch den Ursprung gehen. Die geodätischen Linien der Interpretation W_n haben mit K je 2 Punkte gemein, durch die auch eine Gerade aus W_1 bestimmt ist, die sog. Basisgerade der Kurve. Es wird gezeigt, daß die allen Geodätischen von W_n durch einen Punkt A zugeordneten Basisgeraden auch durch einen Punkt B gehen derart, daß die Gerade AB den Ursprung enthält. Durch leichte Rechnung ergibt sich ferner folgendes: Die geodätischen Kurven von W_n schneiden bei $n > 1$ den Kreis stets orthogonal, und die durch 2 feste Randpunkte gehenden Kurven nähern sich bei wachsendem n dem Mittelpunkt. Jedem Punkt der Deutung W_n entspricht

ein auf demselben Strahl durch den Ursprung gelegener Punkt von W_1 . Dadurch kann man auch die Entfernung zweier Punkte der Deutung W_n auf die der zugeordneten in W_1 zurückführen, wo sie in bekannter Weise durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses definiert ist. Hieraus berechnet sich auch ein ds^2 der Metrik W_n . Die nichteuklidischen Bewegungen in W_n sind schließlich solche eindeutigen Transformationen, die das Innere von K so in sich überführen, daß die entsprechenden Basispunkte in bekannter Weise nach den automorphen Kollineationen des Kreises K verändert werden.

W. Burau.

Bottema, O.: Flächen mit euklidischer Metrik in der nicht-euklidischen Geometrie. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 22, 246—268 (1948) [Holländisch].

Die in einer Preisaufgabe gestellte Frage nach den im Titel angeführten Flächen führt Verf. durch die Bemerkung, daß es sich dabei gerade um die Flächen mit der Gaußschen Krümmung $K = 0$ handelt, auf ein gelöstes Problem zurück: Als erster zeigte Bianchi [Ann. Mat. pura appl., Milano, II, S. 24, 93—129 (1896)], daß man alle Flächen mit $K = 0$ im elliptischen Raum (auf dessen Behandlung der Schwerpunkt der Arbeit liegt) erhält, indem man zwei beliebige durch genormte homogene Koordinaten beschriebene Kurven mit der Torsion $T = \pm k$ nimmt (k ist die Krümmung des elliptischen Raumes und die eine als Erzeugende einer 1-parametrischen Schar der elliptischen Bewegungen, die eine Regelschar des absoluten Kegelschnitts invariant lassen, wählt (in der Matrix dieser Bewegungen treten ja gerade vier bis auf die Normierung unabhängige Elemente auf). Unter dem Einfluß dieser Bewegungen beschreibt die andere Kurve die gesuchte Fläche. — Ist die eine Kurve eine Gerade, so kann man als zweite Kurve eine beliebige Kurve wählen; d. h. bei einer Regelfläche mit $K = 0$ bilden die Erzeugenden eine beliebige 1-parametrische Schar einer Clifford-Kongruenz. Eine andere Kennzeichnung: Die Regelflächen mit $K = 0$ werden durch die Binormalen einer Kurve mit der Torsion $T = \pm k$ beschrieben. — Verf. verfolgt weiter die Geschichte des Problems und schließt mit einer ausführlichen Diskussion der speziellen algebraischen Regelfläche

$$(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 + (x_3^2 + x_4^2)^2 = (x_1 x_3 + x_2 x_4)^2 \operatorname{tg}^2 r,$$

die von den Clifford-Parallelen, die einen Kreis vom Radius r treffen, erzeugt wird.

Klingenberg.

Santaló, L. A.: Einige Ungleichungen zwischen den Elementen eines Tetraeders in der nicht-euklidischen Geometrie. Math. Notae, Rosario 9, 113—117 (1949) [Spanisch].

Sind l_i die Längen der Kanten eines Tetraeders und α_i die entsprechenden Diederwinkel ($i = 1, 2, \dots, 6$), so gelten im euklidischen Raum die Ungleichungen $2 \sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i < 3 \sum \alpha_i l_i$. Verf. beweist für den Fall eines dreidimensionalen Raumes mit der konstanten Krümmung K das Bestehen der entsprechenden Ungleichungen $2 \sum \alpha_i l_i < \pi \sum l_i + 4 K V < 3 \sum \alpha_i l_i - 2 K V$, in denen V das Volumen des Tetraeders bedeutet. Setzt man $|K| = 1$, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, so kann man die Ungleichungen in die Formen bringen: $\frac{1}{4} \sum (2 \alpha_i - \pi) l_i < V < \frac{1}{6} \sum (3 \alpha_i - \pi) l_i$ für den elliptischen Raum ($K = +1$) und $\frac{1}{6} \sum (\pi - 3 \alpha_i) l_i < V < \frac{1}{4} \sum (\pi - 2 \alpha_i) l_i$ für den hyperbolischen Raum ($K = -1$).

Max Zacharias.

Szász, Paul: Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene. Acta sci. math., Szeged 12 A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 44—52 (1950).

Elementare Herleitung der Formeln der ebenen hyperbolischen Trigonometrie, wobei Hilfsfunktionen $S(x)$ und $C(x)$ betrachtet werden, die sich nachher als identisch mit den Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ erweisen. Die Arbeit stützt sich auf Untersuchungen von M. Réthy [Arch. Math. Phys. 58, 416—423 (1876)] und Ch. J. de la Vallée Poussin [Mathesis, II. S. 5, Suppl. V, 6—15 (1895)]. Dabei werden Stetigkeitsbetrachtungen ausgiebig benutzt.

J. C. H. Gerretsen.

Novotný, Miroslav: Sur une généralisation de la théorie de Weyr concernant les nombres caractéristiques des matrices. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 3, 239—240 und französ. Zusammenfassg. 241 (1950) [Tschechisch].

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der im Titel genannten Theorie auf sog. projektive A -Räume, die mit den von T. Nakasawa [Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 235—255 (1935), A 3, 45—69 und 123—136 (1936); dies. Zbl. 16, 37] eingeführten identisch sind [vgl. auch Haupt-Nöbeling-Pauc, J. reine angew. Math. 181, 193—217 (1940) und 183, 68 (1940); dies. Zbl. 24, 20] Verf. führt dann sogen. A -Kollineationen ein, d. h. gewisse Abbildungen eines A -Raumes in sich, wegen deren Definition auf den Text der Abhandlung selbst verwiesen werden muß, und konstruiert zur A -Kollineation Unterräume, durch deren Rangzahlen die verallgemeinerten charakteristischen Zahlen erklärt sind. *Otto Haupt.*

Baer, Reinhold: Projectivities of finite projective planes. Amer. J. Math. 69, 653—684 (1947).

In einer endlichen projektiven Ebene, in der über die projektiven Inzidenzaxiome hinaus nichts vorausgesetzt wird, werden die Projektivitäten (d. h. die eindeutigen, inzidenzverhaltenden Abbildungen) untersucht. Da demgemäß die Einführung eines Koordinatensystems mit Koordinaten aus einem Körper i. a. nicht möglich ist, versagen die üblichen analytischen Methoden. Andererseits gestattet die Endlichkeit der Geometrie die Heranziehung von Eigenschaften der Permutationen. So erweisen sich vor allem gewisse Kongruenzaussagen über die Anzahlen der in einer Permutation und ihren Potenzen festbleibenden Elemente als nützlich, und es gelingt dem Verfasser auf diese Weise, aufschlußreiche Strukturaussagen über diejenigen Projektivitäten zu gewinnen, deren Ordnung (im gruppentheoretischen Sinn) die Potenz einer Primzahl ist. Die vielgestaltigen Verhältnisse werden übersichtlich gegliedert mit Hilfe einer Typeneinteilung der Projektivitäten nach der Anzahl und Lage ihrer Fixelemente. Die einzelnen Typen werden bei Projektivitäten von Primzahlpotenzordnung p^m gekennzeichnet durch arithmetische Beziehungen (Kongruenzrelationen) zwischen der Primzahl p und der Invariante n der Geometrie ($n+1$ = Anzahl der Punkte auf einer Geraden). Zum Schluß werden spezielle Gruppen von Projektivitäten in ähnlicher Weise behandelt.

Emanuel Sperner.

Elementargeometrie:

• Fuller, Gordon: Plane trigonometry. New York: Mc Graw-Hill 1950. XIII, 270 p. \$ 2,75.

• Heineman, E. R.: Plane trigonometry. — Alternate ed. New York: McGraw-Hill 1950. XIV, 184 plus 75 p. of tables. \$ 2,50.

Mortensen, Chr.: Veränderliche Kreisbogen. Mat. Tidsskr. A, København 1950, 61—67 (1950) [Dänisch].

Es handelt sich um folgende Aufgabe: Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ . Ein veränderlicher Kreis berühre AC in A . Ein zweiter veränderlicher Kreis soll BC in B und den ersten Kreis in einem Punkt D berühren. Die gemeinsame Tangente der beiden Kreise in D schneide AC in K und BC in L . Die Mittelpunkte beider Kreise liegen auf der gemeinsamen Normale in D . Welches ist der Ort des Punktes D , in dem die veränderlichen Kreisbogen AD und DB zusammenstoßen, und welche Kurven umhüllen die gemeinsame Tangente KL und die gemeinsame Normale? Man findet $\sphericalangle ADB = 90^\circ + \gamma/2$. Für alle möglichen Bogenpaare AD und DB liegt daher D auf einem und demselben Kreis durch A und B , der auch durch den Inkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC geht. Die gemeinsame Tangente und die gemeinsame Normale berühren zwei feste Kreise. Alle drei Kreise haben einen und denselben Mittelpunkt, den Schnittpunkt der Halbierungslinie des Winkels γ und der Mittelsenkrechten von AB . Verf. untersucht das Verhalten des Quotienten q der Radien der beiden veränderlichen Kreisbogen DB und AD , wenn D den Kreis AOB durchläuft. In O hat q sein Maximum und in O_c sein Minimum (O_c = Ankreismittelpunkt für die Seite AB).

Max Zacharias.

Thébault, Victor: Sur les points de Steiner et de Tarry. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, I. Ser. **64**, 131—138 (1950).

Die Steinersche Umellipse des Dreiecks $t \equiv ABC$ trifft den Umkreis (O) in einem vierten Punkt S , dem Steinerschen Punkt, der dem Tarryschen Punkt T auf dem Umkreis diametral gegenüberliegt. Mit den Eigenschaften dieser beiden Punkte haben sich zahlreiche Geometer beschäftigt. Der neue Gedanke, mit dem Verf. an diesen Fragenkreis herantritt, besteht in der Anwendung der Eigenschaften des Orthopols eines Umkreisdurchmessers bezüglich t . Auf diese Weise ergeben sich neue einfachere Beweise bekannter Sätze; er kann manche Sätze vervollständigen und neue hinzufügen. Es handelt sich um Lagebeziehungen zwischen S , T , dem Höhenpunkt, dem Schwerpunkt, dem Lemoineschen Punkt, dem Mittelpunkt des Brocardschen Kreises, dem Brennpunkt der Kiepertschen Parabel des antikomplementären Dreiecks t_1 , den isodynamischen Punkten und anderen Punkten. Den Wortlaut der vielen Sätze und Folgerungen anzugeben, würde zu weit führen.

Max Zacharias.

Woude, W. van der: Über die Ausdehnung einiger bekannter Sätze der ebenen Geometrie. *Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950—014*, 2 p. (1950) [Holländisch].

Sucht man in der Planimetrie 4 Punkte mit der Eigenschaft, daß die Gerade durch irgend zwei von ihnen auf der Geraden durch die beiden andern senkrecht steht, so findet man nach willkürlicher Annahme dreier Punkte A, B, C als vierten den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC . Sucht man entsprechend im Raum 6 Punkte mit der Eigenschaft, daß die Ebene durch irgend drei von ihnen auf der Ebene durch die drei andern senkrecht steht, so findet man nach willkürlicher Annahme von vier Punkten A, B, C, D als Ort für die beiden letzten das Höhenhyperboloid des Tetraeders $ABCD$.

Max Zacharias.

Hjemslev, Johannes: Der verallgemeinerte Ptolemäische Lehrsatz und die Formel von Strehlke. *Mat. Tidsskr. A, København 1950*, 73—77 (1950) [Dänisch].

Sind x, y die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit den Seiten a, b, c, d , so ist $(xy)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos(B + D)$. Diese Gleichung geht für $B + D = 180^\circ$ in den Ptolemäischen Lehrsatz über und stellt also eine Verallgemeinerung dieses Satzes dar. Aus ihr ergibt sich weiter die Strehlkesche Formel für den Vierecksinhalt T : $T^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(B + D)$. Ref.: Jene Verallgemeinerung findet sich schon bei C. A. Bretschneider, *Arch. Math. Phys.* **2**, 225 (1842).

Max Zacharias.

Jensen, Henry: Die sechs unendlichen regulären Polyeder. *Mat. Tidsskr. A, København 1950*, 53—60 (1950) [Dänisch].

Außer den 5 Platonischen Körpern, den 4 Poinsoischen regelmäßigen Polyedern höherer Ordnung und den 3 Keplerschen Polyedern, die sämtlich endlich sind, gibt es 6 unendliche regelmäßige Polyeder. — Verf. gibt folgende elementare Definition eines regelmäßigen Polyeders: Es soll zweiseitig sein, d. h. man kann eine Außenseite und eine Innenseite unterscheiden. Es soll möglich sein, eine beliebige Seitenfläche S_1 mit einer beliebigen andern S_2 und zugleich eine beliebige Kante von S_1 mit einer beliebigen Kante von S_2 zur Deckung zu bringen. Dabei soll zugleich das Polyeder als ganzes mit sich selbst zur Deckung gebracht werden. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß alle Flächen regulär und kongruent, alle Diederwinkel gleich und alle Ecken kongruent sind. Aber es folgt nicht, daß alle Ecken regulär sind, d. h. aus einer Kugel um den Eckpunkt ein regelmäßiges sphärisches Vieleck ausschneiden, und daß das Polyeder endlich ist. — Die 6 nach dieser Definition möglichen unendlichen Polyeder sind die drei Keplerschen „ebenen Mosaiken“ oder „Parkettierungen“ aus Quadraten, gleichseitigen Dreiecken und regelmäßigen Sechsecken und 3 von Petrie und Coxeter 1926 gefundene Polyeder: A. Begrenzt von Quadraten, von denen 6 in jeder Ecke zu-

sammenstoßen. B. Begrenzt von regelmäßigen Sechsecken, 4 in jeder Ecke zusammenstoßend. C. Begrenzt von regelmäßigen Sechsecken, 6 in jeder Ecke zusammenstoßend. — Verf. beweist weitere Eigenschaften dieser drei Körper.

Max Zacharias.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• Engel, Gerhard: *Analytische Geometrie*. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. 239 S. Geb. DM 18,00.

Dieses Buch „soll eine Lücke schließen zwischen der schulmäßigen Darstellung der analytischen Geometrie und ihrer Behandlung auf der Hochschule bzw. in den entsprechenden Lehrbüchern. . . . Vorausgesetzt werden nur die einfachsten elementargeometrischen, algebraischen und trigonometrischen Kenntnisse, so wie sie etwa auf der Mittelstufe der höheren Schulen gelehrt werden.“ — In der Ebene werden bei den linearen Gebilden die Sätze von Menelaos und Ceva (elementargeometrisch bewiesen), das Doppelverhältnis und das vollständige Viereck gebracht. Das Kapitel über den Kreis reicht bis zu Pol und Polare, Chordale und den verschiedenen Typen von Kreisbüscheln. Die Betrachtungen über Kegelschnitte werden eingeleitet durch die affine Abbildung vermöge Parallelprojektion und die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels nebst Dandelinischen Kugeln. Es folgen ausführlich die verschiedenen Formen von Gleichungen für Ellipse, Parabel und Hyperbel, auch in schiefwinkligen und Polarkoordinaten, die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurven, sowie Punkt- und Tangentenkonstruktionen, Pol und Polare, die Diskussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades (durch Übergang zu schiefwinkligen Koordinaten), perspektive Abbildungen und schließlich die Sätze von Pascal und Brianchon (bewiesen mittels der Umkehrung des Satzes von Menelaos). Bei den Flächen 2. Ordnung wird nach der Kugel die allgemeine Gleichung 2. Grades besprochen, wobei jedoch die Beseitigung der gemischt quadratischen Glieder (diesmal durch Drehung des Koordinatensystems) nur erwähnt wird. Es werden dann nacheinander Kegel- und Zylinderflächen, das Ellipsoid und die anderen Flächen mit ihren ebenen Schnitten behandelt. Nach einem kurzen Kapitel über Vektoren bilden die beiden Kapitel IX: Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffs und X: Einteilung der Geometrie nach dem Gruppenbegriff, den Abschluß. Kap. IX (11 Seiten) soll den Leser in Kürze mit homogenen, Linien- und Ebenenkoordinaten, dem Dualitätsprinzip, Kurven 2. Klasse und imaginären Elementen bekannt machen. Kap. X (17 Seiten) führt bis zu der projektiven, der affinen und der äquiformen Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Ordnung. — Wer auf Grund obiger aus dem Vorwort zitierter Sätze eine durchweg leicht verständliche und solide Darstellung mit präzise formulierten Begriffen und Sätzen und klarem logischem Aufbau erwartet, wird sich in gewisser Hinsicht enttäuscht sehen. Einige Begriffe, wie z. B. der des positiven Drehsinns und Umlaufsinns, werden überhaupt nicht erklärt, andere nur mangelhaft oder erst an späterer Stelle. Auch wird zwischen Definition und Aussage nicht immer klar genug unterschieden. Die Voraussetzungen sind verschiedentlich nur lückenhaft angegeben. Sätze und Formeln werden des öfteren nur aus einer speziellen Figur abgelesen. Unklarheiten und gelegentlich auch unrichtige Aussagen entstehen vor allem dadurch, daß die Winkel nicht von Anfang an mit der nötigen Sorgfalt definiert und behandelt werden, sowie dadurch, daß nicht immer klar genug zwischen orientierten und nicht orientierten Geraden und Strecken unterschieden wird. — Von Vektoren macht Verf. beim Aufbau keinen Gebrauch. Wenn dann gegen Ende des Buches (auf 5 Seiten) eine Einführung in die Vektorrechnung nachgetragen und (auf 2 weiteren Seiten) einige Formeln der analytischen Geometrie in Vektoren angeschrieben werden, so vermag der Leser wohl zu erkennen, daß sich dadurch eine Verkürzung derselben erzielen läßt. Da Verf. aber zur Begründung auf die früher gegebene vektorfreie Herleitung verweist, tritt der eigentliche Vorteil der Vektorrechnung nicht in Erscheinung. — Manche Unklarheit und Lücke entsteht auch durch die Art der Behandlung des Unendlichen. Die Einführung der Fernelemente erfolgt im Zusammenhang mit der Polarentheorie. Sie führen im übrigen ein wenig beachtetes Dasein. Der Satz, daß dann je 2 verschiedene Geraden einer Ebene genau einen Schnittpunkt besitzen und der entsprechende für 2 Ebenen finden keine Erwähnung. — Auch über Determinanten und lineare Gleichungen hätte etwas mehr gesagt werden dürfen. Der schon zu Anfang (auf 4 Seiten) gegebene Abriß schließt mit der Cramerschen Regel und der Bemerkung, die Möglichkeit zur Auflösung eines Gleichungssystems sei an die Bedingung $D \neq 0$ geknüpft. In der Folge wird dementsprechend die Frage der Auflösbarkeit und der Eindeutigkeit sehr oberflächlich behandelt (z. B. S. 126, 149), wenn nicht gar falsch entschieden (S. 144). Unzureichend begründet ist auch die lediglich durch Spezialisierung festgestellte Orientierung des durch seine Koordinaten definierten Vektorprodukts (S. 206). — Vermissen wird man die Formeln für die Koordinaten des Mittelpunktes, die Krümmungskreise in den Scheiteln, ferner etwas über Kegelschnittbüschel und über konfokale Kegelschnitte. Durch häufigere Verwendung von Transformationen des Koordinatensystems hätte sich manches einfacher machen lassen, z. B. die Hessesche Normalform und die zugehörigen Abstandsbetrachtungen. — Das Buch ist mit zahlreichen (125) Figuren ausgestattet, die aber

zum Teil nicht die wünschenswerte Qualität haben. Größere Unrichtigkeiten sind dem Ref. bei den Figuren 48, 53, 95, 106, 109, 110 aufgefallen.—Viele eingestreute und durchgerechnete —bei den Flächen allerdings etwas dünn gesäte — Übungsbeispiele (meist in Zahlen) geben dem Leser Anleitung zum Gebrauch der Formeln und Sätze. Druckfehler: S. 200 muß es in der viertletzten Gleichung $= 0$ statt $= 1$ heißen.

Erich Schönhardt.

Niče, Vilko: *Aperçu court de la géométrie synthétique.* Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 73—81 und französ. Zusammenfassg. 82 (1949) [Kroatisch].

L'A. donne un aperçu tout court d'une suite de faits principaux de la géométrie synthétique (projective) embrassant entre autres les éléments imaginaires, les courbes gauches du troisième ordre, les surfaces réglées du second ordre et les surfaces générales du second et troisième ordre.

(Autoreferat.)

Belgodère, Paul: *Les géométries de figures orientées.* Gaz. Mat., Lisboa 10, Nr. 39 et 40, 16 S. (1949).

In der durch viele konkrete Beispiele untermalten allgemeinen Darstellung beschreibt Verf. in gut verständlicher und übersichtlicher Art die vielen Möglichkeiten der höheren Geometrie zur Orientierung ihrer Figuren. Besonderes Augenmerk wird dabei außer den elementaren Methoden den Unterscheidungsmöglichkeiten gruppentheoretischer Art und der Intervention des Komplexen sowie der Einführung uneigentlicher Elemente zugewandt.

Karl Strubecker.

Argunov, B. I.: *Postulate für Konfigurationen und ihre algebraischen Äquivalente.* Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 425—456 (1950) [Russisch].

Die Arbeit untersucht mit großer Sorgfalt die algebraische Bedeutung der verschiedenen einfachen Schließungssätze der projektiven Ebene. Die Konfigurationen werden so bezeichnet wie in den bekannten Arbeiten von R. Moufang [Math. Ann., Berlin 106, 755—795, 107, 124—139 (1932), 108, 296—310 (1933); dies. Zbl. 4, 362, 411, 6, 217]. Ferner knüpft Verf. besonders an die Arbeit von Hall [Trans. Amer. math. Soc. 54, 229—277 (1943)] an. Wie bei Hall wird die Ebene nach Auszeichnung des Koordinatenvierecks O, P_x, P_y, E durch einen ternären Ring R (hier kurz „Ternär“ genannt) algebraisiert. „Ternär“ soll bedeuten, daß man aus 3 Elementen a, b, c stets $a \cdot b + c$ bilden kann, außerdem wird die 0 und 1 in R verlangt. Geraden außer der „Ferngeraden“ P_x, P_y haben dann stets Gleichungen der Form $x = a$ oder $y = x \cdot a + b$. Jede Konfiguration der Ebene hat dann als sog. algebraisches Äquivalent ein Rechengesetz in R zur Folge. Verf. unterscheidet dabei sorgfältig zwischen lokaler, affiner und projektiver Äquivalenz, ja nachdem ob die betr. Konfiguration nur bei bestimmter Lage ihrer Elemente gilt oder bei allen solchen, wo gewisse 2 Konfigurationspunkte auf der Ferngeraden P_x, P_y liegen oder schließlich ohne derartige Beschränkungen. Dann werden zuerst die einfachsten Konfigurationen, wie die verschiedenen Formen des Pappus, Désargues, usw. auf ihre lokale Äquivalenz hin untersucht. Es ergibt sich z. B., daß der einfachste Konfigurationssatz D_8 vom Rang 8 (in der Moufangschen Bezeichnung) bei geeigneter Lage im Koordinatensystem die Übereinstimmung der Elemente $-a$ und $\sim a$ als Lösungen von $a + x = 0$ und $x + a = 0$, der kleine Pappus in einer Gestalt die Kommutativität der Addition, in der anderen die Gleichheit der beiden inversen a^{-1} und σ^{-1} bedeutet. Dann wird angegeben, wie man umgekehrt von den einfachen Rechengesetzen in R , dem assoziativen, kommutativen und den beiden distributiven, zu entsprechenden Konfigurationen gelangt. Kap. II nimmt sich darauf die bekanntlich nicht ganz leichte Frage der Abhängigkeiten zwischen den Konfigurationssätzen vor. Wieder wird dabei sorgfältig unterschieden, ob diese Abhängigkeit projektiv, affin oder lokal gilt (so folgt nach Hessenberg der Désargues aus dem Pascal projektiv). Es wird zunächst gezeigt, daß folgende sechs speziellen Assoziativregeln: $(a b) b^{-1} = a$, $a^{-1}(a b) = b$, $(a b) b = a(b b)$, $(a a) b = a(a b)$, $(a b) b^{-1} = a$, $a^{-1}(a b) = b$ alle, entsprechend gedeutet, aus der Konfiguration (10; 11, 11) folgen, ebenso wie folgende sechs Regeln $(a + b) + (-b) = a$, $(\sim a) + (a + b) = b$, $(a + b) + b = a + (b + b)$, $(a + a) + b = a + (a + b)$, $(a + b) + (\sim b) = a$, $(-a) + (a + b) = b$ aus (9; 11, 12) folgen. Dies führt schon auf einige Abhängigkeiten, z. B.: D_8 folgt lokal aus (9; 11, 12). Dann werden Beziehungen zwischen obigen beiden Ketten von Assoziativgesetzen untersucht, sowie einige Vorzeichenregeln der Art $(-a) a = \sim (a a)$ und Ähnliches; das ergibt weitere Abhängigkeiten, die hier nicht wiedergegeben werden können. Ferner wird eine Geometrie nach Veblen-Wedderburn (1907) untersucht, in der nur der kleine Désargues in affiner Beschränkung gilt, und gezeigt, daß dann z. B. auch eine affine Form des D_8 , aber keine allgemeinere gilt und daß ähnlich auch der affine D_9 nicht den projektiven D_9 zur Folge hat. Als kompliziertere Konfiguration wird (12; 14, 16) betrachtet und gezeigt, daß sie projektiv dem vollen Désargues vom Rang 11 gleichwertig ist. Eine Tafel, worin die Abhängigkeiten der Sätze durch Pfeile deutlich gemacht werden, beschließt die Arbeit.

Werner Burau.

Fadini, Angelo: *Gli S_r n -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 557—562 (1950).

A partir de l'interprétation matricielle des nombres n -duels dus à Spampinato [Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 2, 193—231 (1941); ce Zbl. 25, 174] l'A. remarque qu'un nombre n -duel peut se regarder comme un $(n-1)$ -ple de nombres biduels, ayant tous même coefficient du module. Le S^r projectif n -duel étant un ensemble d'éléments en correspondance biunivoque avec les $(r+1)$ -ples de nombres n -duels non nuls ni diviseurs de zéro de caractéristique maxima, il en résulte que ce S^r est la totalité des $(n-1)$ -ples de points de $(n-1)$ S^r biduels distincts dont les S^r complexes de bipoints sont entre eux projectifs. Etendant aux S^r biduels la notion de variété de Segre, on voit que le S^r -duel est une variété appartenant à la variété de Segre d'espèce $n-1$ et d'indices tous égaux à r du S^R [$R = (r+1)^{n-1} - 1$], projectif biduel. Selon le type des matrices adoptées pour représenter l'algèbre n -duelle, on peut obtenir des représentations du S^r projectif n -duel par certains complexes d'hyperplans situés dans des S^N avec $n(r+1) - 1 \leq N \leq 2(n-1)(r+1) - 1$; ainsi, si $N = n(r+1) - 1$ le complexe est un n r -complexe de S^{n-1} définis par les droites issues d'un S^r , E appartenant à $(n-1)$ $2r$ -complexes spéciaux ayant l'axe E commun et situés dans $(n-1)$ S^{2r+1} se rencontrant seulement le long de E .
B. d'Orgeval.

Lagrange, René: Sur les produits d'inversions. Bull. Sci. math., II. S. 74, 79—112 (1950).

Die vorliegende Arbeit schließt sich an eine größere des Verf. an (dies. Zbl. 36, 104). Dort war ein Skalarprodukt zweier mit einer Masse versehenen Sphären (U, V) eingeführt worden, wobei die Sphären auch in Punkte entarten können. Mit Hilfe dieses Begriffs läßt sich das Produkt der Inversionen $\bar{U}_n \dots \bar{U}_1$, an den Sphären U_i in der Form

$$(1) \quad M' = \overline{U_n \dots U_1}(M) = M - 2 \sum_{i=1}^n (U_i M) V_i$$

schreiben, wobei (V_n, \dots, V_1) das zu den U_i assoziierte System von Sphären ist ($U_n = V_n$, $V_i = \bar{U}_n \dots \bar{U}_{i+1}(U_i)$, die Massen alle = 1). Es gilt dabei:

$$(2) \quad U_i = V_i + 2 \sum_{j=i+1}^n (U_j U_i) V_j.$$

Ordnet man den U_i und V_i Vektoren u und v zu, so läßt sich (2) in der Matrizenform $u = T(v)$ schreiben, wobei T eine quadratische Matrix von n Zeilen ist, die unterhalb der Hauptdiagonalen lauter Nullen hat. $\frac{1}{2}(T + T')$ ist die Matrix $((U_i U_j))$. Verf. stellt sich nun die Frage, zu entscheiden, wann die Inversionsprodukte $\bar{U}_n \dots \bar{U}_1$ und $\bar{X}_n \dots \bar{X}_1$ identisch sind, wobei die U_i und die X_i zwei Systeme linear unabhängiger Sphären sind. Die vorher eingeführte Symbolik gestattet folgende algebraische Übersetzung der Frage: Gehen die X_i aus den U_i durch $x = A(u)$ hervor, dann muß $A' T A'$ mit T die obige Dreiecksgestalt besitzen; $v = A'(y)$ transformiert in diesem Fall die zu den X_i assoziierten Sphären Y_i in die zu den U_i assoziierten Sphären V_i .

Soll speziell $\bar{U}_n \dots \bar{U}_1 \equiv \bar{X}_n \bar{U}_{n-1} \dots \bar{U}_2 \bar{X}_1$ sein, so ergibt es sich, daß U_1 und U_n alle Sphären U_2, \dots, U_{n-1} orthogonal schneiden müssen. Dann hängt aber die Frage von den Zwischen-sphären nicht ab. Für die Gleichheit der Transformationen $\bar{U}_n \bar{U}_1$ und $\bar{X}_n \bar{X}_1$, die man auch konforme Rotationen nennen kann, gilt nun, analog wie bei den gewöhnlichen Drehungen, daß X_n und X_1 dem Büschel von U_n und U_1 angehören und denselben, reell oder rein imaginär zu rechnenden Winkel bilden müssen wie U_n, U_1 . Weiterhin folgt induktiv, daß man in $U_n \dots U_1 \equiv X_n \dots X_1$ für X_n eine beliebige Sphäre der durch die U_i bestimmten Linearschar vorgeben und dann die übrigen X_i passend dazu bestimmen kann. Insgesamt hängen die X_i , die man so bestimmen kann, daß ihr Inversionsprodukt dem gegebenen U -Produkt gleich ist, von $\binom{n}{2}$ Parametern ab. Setzt man die U_i als wechselseitig orthogonal voraus, so ist die Matrix T orthogonal, und es folgt nebenbei der Satz, daß jede n -dimensionale Bewegung oder Umlegung Produkt von höchstens $\binom{n}{2}$ Rotationen ist. Versteht man unter dem Rang p von U_1, \dots, U_n

die niedrigste Zahl derart, daß es p Sphären X_i gibt mit $\bar{U}_1 \dots \bar{U}_n \equiv \bar{X}_1 \dots \bar{X}_p$, so ist bei linearer Unabhängigkeit der U_i stets $p = n$, sonst ist p um eine gerade Zahl kleiner als n . Im Kap. II wird folgendes gefragt: Gegeben seien je n linear unabhängige Sphären U_i und V_i aus derselben Schar, die aber nicht mehr assoziiert zu sein brauchen, wie vorher, wann ist die Transformation (1) konform? Das Ergebnis lautet: Vertauscht man in (1) die U_i mit den V_i ,

so muß die inverse Transformation herauskommen. Der Schluß dieses Kapitels behandelt noch die Reduktionsmöglichkeiten des Produkts $\overline{U}_n \dots \overline{U}_1 \overline{U}_0$, wobei aber nur U_n, \dots, U_1 unabhängig sind und U_0 davon abhängt. Bei $n = 3$ ergibt sich, daß dieses Produkt unabhängig von der Reihenfolge der U_i eine konforme Drehung mit demselben Winkel ist. *W. Burau.*

Uhler, Horace Scudder: A new constant property of the parabola. Scripta math., New York 16, 161—167 (1950).

Zieht man zwei Parallelen zur Achse einer Parabel, welche die Parabel in A' und B' schneiden, wählt man C auf der Sehne $A'B'$ in bestimmtem metrischen Verhältnis m/n , und zieht man durch C eine Parallele zur Achse, welche die Parabel in P schneidet, dann ist der Abstand PC nur vom Abstände der ersten beiden Parallelen und vom Verhältnis m/n abhängig, somit konstant, falls man dieses letztere konstant wählt. Dieser Satz wird bewiesen in den ersten drei Seiten der Arbeit [auf Seite 162 steht Linie 6 ein Faktor y_1 zu viel: $\overline{OA} = y_1 - y_2 = k$]. Der Rest der Arbeit enthält eine numerische Analyse der Kurve $y = x/(x+1)^2$, welche also nahezu keinen Zusammenhang mit der Parabel aufweist. [In Formel (a), Seite 160, fehlt ein Faktor -3 .] — Verf. behauptet, daß kein Analogon für Ellipse und Hyperbel existiert. Ref. bemerkt, daß, falls η, y_1, y_2, Ω vier Punkte einer Tangente eines Kegelschnittes sind — Ω sei der unendlich fern gelegene Punkt —, das Doppelverhältnis $(\eta y_1 y_2 \Omega) = (\eta - y_2)/(y_1 - y_2)$ durch Projektion aus dem vom Berührungspunkte verschiedenen Schnittpunkte mit dem der Tangente konjugierten Durchmesser \mathfrak{A} auf den Kegelschnitt übertragen wird zu $(\eta y_1 y_2 \Omega) = (PA'B'\mathfrak{A}) = (PTC\mathfrak{A})$, wo die letzte Gleichheit entsteht durch Projektion aus A' auf $P\mathfrak{P}$ und T der Schnittpunkt mit der Tangente in A' ist. Für die Parabel degeneriert dieser allgemeine Satz, da auch \mathfrak{A} im Unendlichen liegt, zu $(\eta - y_1)/(y_1 - y_2) = PC/TC$; da $TC = TP + PC$ und TP konstant ist, falls dies gilt für $\eta - y_1$, ist PC konstant, sobald $(\eta - y_1)/(y_1 - y_2)$ konstant ist. *E. M. Bruins.*

Gambier, B. et A. Hocquenghem: Ellipses ayant deux sommets consécutifs donnés. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 29, 275—311 (1950).

Verf. untersuchen die Eigenschaften der einparametrischen Schar von Ellipsen (E) in einer Ebene, die in zwei gegebenen Punkten A, B zu verschiedenen Achsen gehörige Scheitel besitzen. Die Einhüllende (\mathfrak{E}) von (E) ist von achter Ordnung und vierter Klasse und besteht aus den zwei Parallelkurven einer Ellipse der Exzentrizität $1/\sqrt{2}$ mit A, B als Mittelpunkten der Hauptscheitelschmiegekreise. Die Schar (E) sendet durch jeden Punkt der Ebene vier Kurven, ebenso berührt jede Gerade der Ebene vier Ellipsen. Die Realität dieser Kurven hängt von der Lage des Punktes bzw. der Geraden zu den beiden Zweigen von (\mathfrak{E}) ab. — Es folgen noch Untersuchungen über die Anzahl der reellen Schnittpunkte einer Ellipse (E) mit der Einhüllenden (\mathfrak{E}), über den Ort der Berührungspunkte zweier sich berührenden Ellipsen (E), (E_1) usw. — Verf. führen ihre sehr umfangreichen Erörterungen z. T. mit elementaren Mitteln, z. T. mit Methoden der projektiven oder algebraischen Geometrie, z. T. werden auch räumliche Deutungen (Darstellende Geometrie) herangezogen. *Hans R. Müller.*

Edge, W. L.: A plane quartic with eight undulations. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 147—162 (1950).

This paper concerns itself with a quartic, endowed with eight undulations, which lie, four by four, on two right lines. In the first place, the author utilizes the lemma that, if a conic $I = 0$ cuts two right lines b and c at the point-pairs (P_1, P_2) and (Q_1, Q_2) , and if the tangents to $I = 0$ at these points be respectively $(T_1 = 0, T_2 = 0)$ and $(U_1 = 0, U_2 = 0)$, then the quartic S_λ , given by $(1) I^2 + \lambda T_1 T_2 U_1 U_2 = 0$, will, for an arbitrary λ , define a quartic, having P_1, P_2, Q_1, Q_2 for undulations. Supposing that (P'_1, P'_2) and (Q'_1, Q'_2) are respectively the pairs of intersections — other than (P_1, P_2) and (Q_1, Q_2) — of the lines b and c with S_λ , the author then allows full variation to the numerical parameter λ , and scrutinizes in some detail the projective properties of the two resulting point-involutions, formed on b and c by (P'_1, P'_2) and (Q'_1, Q'_2) . He then correlates the two point-involutions according to a definite plan, and introduces a second pencil of quartics $S_{\lambda'}$ in the form $I'^2 + \lambda' T'_1 T'_2 U'_1 U'_2 = 0$, where $I' = 0$ is a determinate conic through P'_1, P'_2, Q'_1, Q'_2 and $T'_i = 0, T'_2 = 0, U'_i = 0, U'_2 = 0$ are the tangents to this conic at these points. — Observing that, for some particular value of λ' , the quartic $S_{\lambda'}$ will not only have P'_1, P'_2, Q'_1, Q'_2 for undulations — the tangents at which are $T'_1 = 0, T'_2 = 0, U'_1 = 0, U'_2 = 0$ — but will also pass through P_1, P_2, Q_1, Q_2 , the author definitely proves that $S_{\lambda'}$ can be made to coincide with S_λ by a proper adjustment of both the parameters λ and λ' . In other

words, the two pencils of quartics $\{S_i\}$ and $\{S_{i'}\}$ possess a common quartic X , whose homogeneous equation, can, by a suitable choice of the triangle of reference, be put in the form:

$$x^4 - y^4 - z^4 + 4f x^2 y z + 2f^2 y^2 z^2 = 0.$$

The author then calculates the point-coordinates of the 8 undulations and the line-coordinates of the associated tangents, and further discusses certain properties of the Hessian and the ordinary inflexions of X . He concludes his paper by incidental references to „Maschke“ surfaces and „Maschke“ curves, and to a certain fallacy, occurring in one of Maschke's papers. — Inquisitive researchers may make use of the symbolic form (1) to investigate the system of ∞^2 quartics, having four assigned points for undulations, and to reckon with the associated loci, e. g. the nodal locus of the family of ∞^1 nodal curves, included in the system.

Haridas Bagchi.

Singh, Kuldip: The central points and parameter of distribution. J. Univ. Bombay, n. S. 19, Nr. 3 (Sci. Nr. 28), 1—11 (1950).

Verf. geht aus von der Idee der unendlich fernen Ebene und betrachtet die Schnitte („Spuren“), die von Kurven und Flächen auf dieser Ebene erzeugt werden, insbesondere den Kreis Ω auf ihr. Er entwickelt einige Sätze über die Lage der Spuren von Geraden und Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, in bezug auf Ω , definiert den „Zentralpunkt“ auf einer Erzeugenden g einer Fläche zweiter Ordnung (Fußpunkt des Minimalabstandes zwischen g und der konsekutiven Erzeugenden) und beweist mit Hilfe der entwickelten Sätze und Begriffe einige seiner Eigenschaften. Indem er die Fläche zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht, dessen Achsen eine Erzeugende, die Linie des Minimalabstandes und die Flächennormale im Zentralpunkt sind, und die Bemerkung benützt, daß zu jeder Erzeugenden einer nicht abwickelbaren Regelfläche eine Fläche zweiter Ordnung gefunden werden kann, die die Regelfläche längs dieser Erzeugenden berührt, gelingt es ihm, in einfacher Weise, auch Sätze über den Zentralpunkt beliebiger Regelflächen und über deren Striktionslinien (Ort der Zentralpunkte aller Erzeugenden) sowie über den Verteilungsparameter einer Erzeugenden (d. h. den Grenzwert des Verhältnisses des Winkels zwischen zwei konsekutiven Erzeugenden zu ihrem Minimalabstand) abzuleiten. Schließlich wird eine Methode zur Bestimmung des Verteilungsparameters entwickelt und am Beispiel des hyperbolischen Paraboloids illustriert. Alle Beweise werden mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie geführt.

Eugen Löffler.

Lagrange, René: Les familles de cônes de même sommet qui possèdent des harmoniques. Acta math., Uppsala 79, 1—15 (1947).

L'A. a montré [Acta math., Uppsala 71, 283—315 (1939); ce Zbl. 22, 228] que les surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques sont les cyclides de révolution, les harmoniques étant données par des équations de Bessel, Legendre, Lamé. Comme cylindres parallèles ou cônes de même sommet, on trouve uniquement: familles orthogonales de plans parallèles, cylindres circulaires coaxiaux associés à leurs plans diamétraux, cylindres paraboliques homofocaux (équation de Weber), cylindres elliptiques et hyperboliques homofocaux (équation de Mathieu); les cônes donnent uniquement les cônes homofocaux et donnent la particularité intéressante de fournir une équation différentielle analogue à celle dont dépendent les surfaces de révolution; on trouve en effet l'équation $(du/dx)^2 = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e$; tandis que les coefficients constants a, b, c, d, e sont réels pour les harmoniques de révolution, pour les cônes on a les relations $e = \bar{a}$, $d = -\bar{b}$, c réel; par rotation autour de l'origine, on peut annuler e, a et supposer b, c, d réels, avec $d = -b$. Une première solution est fournie par $b = 0$ et $c \neq 0$; les cônes correspondants sont les cônes de révolution autour de $0z$ et leurs plans diamétraux; les harmoniques correspondants sont les harmoniques sphériques. Si b n'est pas nul, on trouve, comme solution générale, les cônes homofocaux du second degré. On rencontre ainsi le théorème curieux de géométrie sphérique: on sait que la trace d'un cône du second degré sur la sphère de rayon unité centrée au sommet de ce cône est une

courbe C qui a pour foyers les traces sur cette sphère des deux focales réelles du cône et que C peut être considérée au choix comme ellipse sphérique ou hyperbole sphérique, relativement à deux foyers non diamétralement opposés: en remplaçant l'un deux par son opposé, on échange les définitions à titre d'ellipse ou d'hyperbole; si nous effectuons la perspective stéréographique de la sphère à partir du foyer sphérique Φ de C sur le plan diamétral perpendiculaire au rayon terminé en Φ , le foyer Φ' opposé à Φ donne le point O , et les deux foyers F, F' donnent deux points f, f' alignés avec O tels que $\overline{Of} \cdot \overline{Of'} = -1$ et la perspective de C est un ovale de Descartes dont les foyers sont O, f, f' ; inversement une telle cartésienne fait remonter à une courbe C . Les harmoniques correspondants sont bien connus.

B. Gambier.

Plamitzer, Antoni: Surface d'ordre 6 ayant une courbe gauche double d'ordre 6 et de genre 3. *Prace mat.-fiz., Warszawa* **47**, 67—104 (1949).

Es wird eine Verallgemeinerung der Graßmannschen Erzeugung einer Fläche 3. Ordnung durch drei kollineare Ebenenbündel untersucht. In drei kollinearen Räumen, die nicht einem Büschel angehören, werden drei entsprechende Flächen 2. Klasse φ_i gewählt. Die betrachtete Fläche ψ^6 ist der Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechenden Tangentialebenen der φ_i . Ihre Doppelkurve K_3^6 besteht aus denselben Schnittpunkten je dreier entsprechenden Geraden in den kollinearen Räumen. Die 12 Trisekanten der K_3^6 gehören ψ^6 an. Entsprechende Tangentialkegel der φ_i erzeugen $\infty^3 C^6$ auf ψ^6 , ferner $\infty^2 C^5$, 66 Büschel von C^4 und 220 C^3 . Entsprechende Büschel von Tangentialebenen der φ_i erzeugen zwei Systeme von je $\infty^1 C^3$ und zwei Gruppen von je 12 Kegelschnitten auf ψ^6 . — Schließlich werden die ebenen Schnitte der ψ^6 untersucht und zwei Abbildungen der ψ^6 auf die Ebene angegeben.

Fritz Hohenberg.

Longo, C.: Sui sistemi di ipersuperficie di S_r che ammettono lo stesso sistema primo polare nei casi in cui l'omografia determinata dai poli sia particolare. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 3*, 536—541 (1947).

Le ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r aventi lo stesso sistema primo polare si distribuiscono in uno od infiniti sistemi lineari Σ ed i poli si corrispondono in un'omografia Ω determinata da due generiche V_{r-1}^n (non coni) di uno stesso sistema Σ [Bertini, *Atti Accad. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 7*, 217—227, 275—281 (1898); Longo, questo Zbl. **29**, 315]. Orbene, l'A. comunica alcuni teoremi che permettono di determinare i sistemi Σ nei casi in cui l'omografia Ω è particolare. *Mario Villa.*

Algebraische Geometrie:

Waerden, B. L. van der: Les valuations en géométrie algébrique. *Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25.9.—1.10.1949)*, 117—121 (1950).

Expository address about the applications of the theory of valuations to the algebraic geometry. After some general considerations, especial attention is paid to the Zariski's theory of reduction of the singularities of algebraic varieties [Zariski, *Ann. Math., Princeton, II. S. 40*, 639—689 (1939), **41**, 852—896 (1940), **43**, 583—593 (1942), **45**, 472—542 (1944); this. Zbl. **21**, 253, **25**, 216] and to the author's theory of birational invariants of linear systems [van der Waerden, *Acta Salmantica, Ci., Sec. Mat. 2*, 1—56 (1947)]. — As open questions the following ones are emphasized: 1. Extension to the Weil's abstract varieties of the theory of linear systems; 2. The study, from the valuation theory's view-point, of the differentials, of the canonic class, etc.; and 3. A full study of the class group. — Erratum. At pag. 118, right side, line 3, $\eta(Q) + \zeta(Q)$ must be changed by $\eta(Q) \cdot \zeta(Q)$.

German Ancochea.

Habicht, Walter: Topologische Eigenschaften reeller algebraischer Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann., Berlin* **122**, 181—204 (1950).

Die algebraische Geometrie hat in den vergangenen zwei Jahrzehnten eine abstrakte Richtung eingeschlagen und hat den eigentlich topologischen Eigenschaften von algebraischen Mannigfaltigkeiten nur in einem sehr speziellen Sinne Aufmerksamkeit gegönnt, eben weil sie sich bei ihren Definitionen auf Körper stützt, die keine topologische Struktur aufweisen. Verf. versucht eine Synthese zu geben von Algebra und Topologie, indem er gewisse topologische Begriffsbildungen mit den abstrakt algebraischen in Einklang bringt. Das geschieht mit Hilfe eines einfachen Grundgedankens, der sich etwa folgendermaßen fassen läßt: Es sei irgendein Körper K gegeben. S^n sei der projektive Raum im abstrakten Sinne, d. h. die Koordinaten irgendeines Punktes von S^n gehören einem beliebigen Erweiterungskörper von K an. Wenn nun \mathfrak{P} eine nicht-leere Teilmenge von S^n ist, so heißt die Gesamtheit aller Punkte von \mathfrak{P} , deren Koordinaten einem System von algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus K genügen, eine \mathfrak{P} -Mannigfaltigkeit. Es zeigt sich, daß manche Begriffsbildungen aus der abstrakten Theorie für diese \mathfrak{P} -Mannigfaltigkeiten einen Sinn haben, und zwar wird die Übertragung ermöglicht durch den Begriff der Minimalerweiterung. Die Minimalerweiterung $Me(M)$ einer \mathfrak{P} -Mannigfaltigkeit M ist die (eindeutig bestimmte) Gesamtheit aller Punkte des S^n , deren Koordinaten dem System sämtlicher algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus K , die auf M erfüllt sind, genügen. — Um nun zu topologischen Eigenschaften von \mathfrak{P} -Mannigfaltigkeiten zu gelangen, wird die Punktmenge \mathfrak{P} der einschränkenden Bedingung unterworfen, daß sie Träger einer Topologie sein soll. Das kann z. B. in der Weise geschehen, daß man für \mathfrak{P} einen n -dimensionalen Koordinatenraum $A^n \subset S^n$ nimmt, dessen Koordinatenverhältnisse einem Körper entstammen, welcher selbst ein topologischer Raum ist. Wenn A angeordnet ist, läßt sich z. B. zeigen, daß die betreffenden \mathfrak{P} -Mannigfaltigkeiten, vom Verf. A -Mannigfaltigkeiten genannt, in A^n abgeschlossen und nirgends dicht sind. Insbesondere ist eine genügend kleine Umgebung eines einfachen Punktes homöomorph mit einer Umgebung in A^n , wenn der Körper A reell abgeschlossen ist. — Ferner entwickelt Verf. Hilfsmittel, um einen Beitrag zur Analyse der mehrfachen Punkte geben zu können.

J. C. H. Gerretsen.

Northcott, D. G.: The number of analytic branches of a variety. J. London math. Soc. 25, 275—279 (1950).

Um die analytischen Zweige einer irreduziblen Mannigfaltigkeit V in einem endlich-dimensionalen projektiven Raum längs einer irreduziblen Untermannigfaltigkeit W zu definieren, bildet man den durch V und W bestimmten Stellenring \mathfrak{R} und seine vollständige Hülle $\tilde{\mathfrak{R}}$. Während \mathfrak{R} nullteilerfrei ist, wird in $\tilde{\mathfrak{R}}$ das Nullideal Durchschnitt von endlich vielen, paarweise primen Primidealen $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{p}}_h$. Den $\tilde{\mathfrak{p}}_h$ entsprechen dann die h verschiedenen, analytischen Zweige von V längs W . Verf. beweist nun den folgenden Satz: Hat man eine birationale Transformation \mathfrak{Z} von V , für die W nicht fundamental ist, so entsprechen W immer höchstens h und bei passender Wahl von \mathfrak{Z} genau h Mannigfaltigkeiten. — Der Beweis stützt sich auf die feinere Theorie der Stellenringe, wie sie von C. Chevalley entwickelt wurde [Ann. Math., Princeton, II. S. 44, 609—708 (1943)], sowie auf die von O. Zariski geschaffene arithmetische Theorie der birationalen Transformationen. Wesentlich ist vor allem die Betrachtung des zu \mathfrak{R} gehörigen ganz abgeschlossenen Ringes \mathfrak{R}^* , der einen Halb-Stellenring (mit endlich vielen maximalen Primidealen) darstellt, und der Vergleich der vollständigen Hülle $\tilde{\mathfrak{R}}^*$ von \mathfrak{R}^* mit der vollständigen Hülle $\tilde{\mathfrak{R}}$ von \mathfrak{R} .

Wolfgang Krull.

Muhly, H. T.: The irregularity of an algebraic surface and a theorem on regular surfaces. Bull. Amer. math. Soc. 55, 940—947 (1949).

Soit U un modèle normal d'un corps Σ de fonctions algébriques de deux variables sur un corps k algébriquement fermé dans Σ . Les hypersurfaces d'ordre m , de l'espace de U , déterminent sur U un système linéaire complet $|C_m|$. A partir d'un certain m la déficience de la série caractéristique de $|C_m|$ est égal à un nombre fixe $\delta(U)$. L'A. démontre: a) $\delta(U) \leq q$, q étant l'irrégularité de Σ ; b) pour les modèles V sans singularités de Σ , $\delta(V) = q$; et c) si U' est le transformé de U , par une T sans points fondamentaux sur U' , $\delta(U) \leq \delta(U')$. — On appelle régulier un modèle U de Σ , si $\delta(U) = 0$; la possibilité d'avoir pour des Σ irréguliers des modèles réguliers est une question non résolue. — La Note termine avec des résultats, sur l'existence de bases entières pour les surfaces régulières, plus généraux que ceux déjà donnés par l'A. [Trans. Amer. math. Soc. 54, 340—360 (1943)].

German Ancochea.

Godeaux, Lucien: Structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre 29. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. S. 24, Nr. 7, 36 S. (1950).

Sur une surface algébrique dotée d'une involution I cyclique d'ordre p , à points unis isolés, ceux-ci sont dits de 1^o espèce si la transformation T génératrice de I , détermine dans leur voisinage du 1^o ordre l'identité, de 2^o espèce si la transformation y détermine une homographie cyclique. Sur la surface F' image de I , aux points unis correspondent des points de diramation de structure complexe; si 1^o espèce, point de diramation d'ordre p pour F' et y équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$. Dans ce mémoire l'A. étudie le cas $p = 29$ et donne toutes les structures possibles des diramations correspondants à des points unis de 2^o espèce. Au voisinage d'un tel point A , sur F , la T détermine une homographie $\lambda': \gamma' = \varepsilon^\alpha \lambda : \varepsilon \gamma$ ($\varepsilon^{29} = 1$) ayant deux droites unies issues de A . Si on pose $\alpha \beta \equiv 1 \pmod{29}$, les nombres α et β sont les indices de A . Dans le système $|C_0|$ correspondant aux sections hyperplanes de F' il existe 15 systèmes linéaires partiels conservés par T donc tels que $\lambda + \alpha \gamma \equiv 0 \pmod{29}$; si on les range en sorte que $\lambda_i + \gamma_i$ soit croissant, on obtient les systèmes successifs, un système $|C_0^{(i)}|$ passant en A avec λ_i tangentes confondues avec une des droites unies et γ_i avec l'autre. L'étude des systèmes successifs $|C_0|, |C_0'|, |C_0''|, \dots$ permet d'écrire pour les sections planes de F' , $|c_0| = |c_0 + \sum \sigma_i|$ les σ_i désignant des courbes rationnelles dont se détermine le degré virtuel. Le tableau suivant résume les résultats.

Indice	Ordre A	Points ∞^t voisins	D ^o des σ_i
2, 15	15	—	-2, -15
3, 10	11	—	-3, -10
4, 22	8	Biplan	-2, -2, -2, -8
5, 6	9	—	-5, -6
7, 25	5	2 biplans successifs	-5, -2, -2, -2, -2, -2
8, 11	6	—	-3, -3, -4
9, 13	5	1 bipl., 1 pt. double successifs	-3, -2, -2, -2, -4
12, 17	5	Point double	-2, -4, -2, -3
14, 27	3	5 biplans successifs	-3, 11 courbes d'ordre -2
16, 20	6	Point double	-2, -2, -6, -2
18, 21	4	Point double	-2, -2, -3, -3, -2
19, 26	3	2 biplans	-3, 6 courbes d'ordre -2
23, 24	3	1 bipl., 1 pt. double non succ.	-3, -2, -2, -2, -2, -2
28, 28	2	13 biplans successifs	28 courbes d'ordre -2

B. d'Orgeval (Grenoble).

Nollet, Louis: Sur les surfaces algébriques de genre linéaire absolu 3. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 587—593 (1950).

Zur Begründung und Präzisierung eines von Enriques (Le superficie algebriche, Bologna 1949; dies. Zbl. 26, 371) skizzierten Verfahrens zur Klassifikation der algebraischen Flächen mit $p^{(1)} > 1$ beweist Verf. folgenden Satz: Wenn eine irreduzible algebraische Fläche mit dem linearen absoluten Geschlecht $p^{(1)} = 3$ irregulär ist, so hat sie notwendig das arithmetische Geschlecht $p_a = 0$ und das geometrische Geschlecht $p_g = 1$. Außerdem erwähnt er andere Eigenschaften von regulären oder irregulären Flächen mit Geschlecht $p^{(1)} = 3$, die es ermöglichen, das Verfahren Enriques' zur Konstruktion von projektiven Modellen besser zu begründen und zu vereinfachen. Er stützt sich dabei auf einen in der Arbeit nicht bewiesenen Satz: Wenn die Fläche F das lineare absolute Geschlecht $p^{(1)} > 1$ hat, so ist jede effektive Kurve auf F , die arithmetisch äquivalent ist mit einer kanonischen oder plurikanonischen Kurve auf F , konnex. Eine effektive Kurve C heißt konnex, wenn die (virtuelle) Schnittzahl $[X, C - X]$ für jeden eigentlichen Bestandteil X der Kurve C positiv ist. Verf. zeigt nun: Wenn F das lineare Geschlecht $p^{(1)} = 3$ hat und eine positive Irregularität g , so ist eine parakanonische Kurve auf F im allgemeinen irreduzibel, und das arithmetische Geschlecht p_a von F ist gleich Null. Ferner: Wenn F irregulär ist und $p^{(1)} = 3$, dann hat das geometrische Geschlecht von F den Wert Eins. — Die Konstruktion von projektiven Modellen F mit $p^{(1)} = 3$ und $p_g \geq 2$ auf Grund eines von Enriques angedeuteten Verfahrens kann geschehen, wenn man von dem Satz ausgeht, der besagt: Das bikanonische System einer Fläche mit $p^{(1)} = 3$ und $p_g \geq 2$ ist immer irreduzibel und hat keine Basispunkte.

J. C. H. Gerretsen.

Gaeta, Federico: Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 570—575 (1950).

Kurzer Bericht über die Ergebnisse einer Untersuchung über die Doppelregelflächen mit dem absoluten linearen Geschlecht $p_{(1)} = 1$. Es handelt sich um algebraische reguläre Flächen F , mit dem Geschlecht $p_g = p_a = p$, die ein lineares und basispunktfreies Büschel $|C|$ elliptischer Kurven enthalten. Es wird zunächst, mit neuen Methoden, der Fall betrachtet, daß die Determinante von F den Wert 1 hat, d. h. der Fall, daß ein Punkt auf jeder Kurve C rational gewählt werden kann. In diesem Falle kann F auf einen rationalen normalen Doppelkegel Φ^{2p+2} eines Raumes S_{2p-3} abgebildet werden; die Verzweigungskurve besteht aus der Kegelspitze und aus der Schnittkurve des Kegels mit einer kubischen Form allgemeiner Art. Mit derselben Methode werden dann die Flächen F mit der Determinante 2 untersucht, auch im Falle, daß das Büschel $|C|$ eine gewisse Anzahl $s > 0$ von elliptischen Doppelkurven enthält. Im letzten Teil wird die Klassifikation aller Flächen F mit der Determinante 1 und dem Geschlecht p , die eine unendliche diskontinuierliche Gruppe birationaler Transformationen zulassen, angegeben. *E. G. Togliatti.*

Vaccaro, Giuseppe: Sulle singolarità di una V_3^4 di S_4 con piano doppio. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 7, 417—427 (1948).

L'A. ha studiato in altro lavoro (questo Zbl. 32, 305) le relazioni che passano fra le singolarità di una V_{r-1}^n di S_r con un punto $(n-2)$ -plo e le singolarità dellaipersuperficie di diramazione che si ottiene proiettando la V_{r-1}^n data dal suo punto $(n-2)$ -plo sopra un S_{r-1} non passante per esso. L'A. considera nel presente lavoro la V_3^4 di S_4 con piano doppio [già studiata dal Marletta, Giorn. Mat. Battaglini, Napoli 40, 265—274 (1902), 41, 47—61, 113—128 (1903)] con lo scopo di dimostrare come dallo studio della superficie di diramazione si possa risalire a quello delle singolarità della V_3^4 stessa. Dopo aver ritrovato, per questa via, i risultati di Marletta, l'A. perviene ad altre proprietà sulle singolarità della V_4 .

Mario Villa.

Franchetta, Alfredo: Sui sistemi pluricanonici di una superficie algebrica. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 423—440 (1949).

Verf. verallgemeinert zwei Sätze von F. Enriques [Sur le théorème de Riemann-Roch, Rev. Acad. Ci. exact. fisic. natur. Madrid 40, 149—159 (1946); Le superficie algebriche, Bologna 1949; dies. Zbl. 36, 371] über die Regularität und Irreduzibilität der mehrkanonischen Systeme von regulären Flächen auf irreguläre Flächen mit $p_a > 0$ und $p_{(1)} > 1$. Verf. zeigt zunächst, daß die effektiv vorausgesetzten kanonischen und mehrkanonischen Kurven entweder irreduzibel oder virtuell zusammenhängend auf einem Modell ohne Ausnahmekurven sind. Daraus folgt die Regularität dieser Systeme, vgl. F. Severi (dies. Zbl. 35, 371). Ferner ist, wie Verf. zeigt, das bikanonische System irreduzibel, wenn das kanonische System keine mehrfachen festen Komponenten besitzt; allgemein müssen eventuelle feste Komponenten des bikanonischen Systems das virtuelle Geschlecht null und einen virtuellen Grad < -2 haben, wobei die Frage, ob dieser Fall verwirklicht sein kann, offen bleibt. In allen Fällen aber ist das trikanonische System, immer unter den oben angegebenen Voraussetzungen, irreduzibel.

Wolfgang Gröbner.

Segre, Beniamino: Sur les points entiers des surfaces cubiques. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 81—82 (1950).

Verf. zeigt eine Methode, welche in gewissen Fällen ausreicht, um rational ganzzahlige (r. g.) Punkte auf kubischen Flächen zu ermitteln. Er geht von der Bemerkung aus, daß eine ebene irreduzible Kubik, die eine Gleichung mit r. g. Koeffizienten und einen Rückkehrpunkt mit r. g. Koordinaten besitzt, unendliche viele r. g. Punkte hat. Besitzt daher eine kubische Fläche eine so geartete Schnitt-

kurve, so kann man für sie dasselbe aussagen. So liegen unendlich viele r. g. Punkte auf einer Fläche $h z^3 = f(x, y)$, wenn $h \neq 0$ r. g. und $f(x, y)$ ein absolut irreduzibles Polynom 2. Grades mit r. g. Koeffizienten und einer bekannten r. g. Nullstelle ist; desgleichen auf einer Fläche $h z^2 = f(x, y)$, wenn $h \neq 0$ r. g. und $f(x, y)$ ein absolut irreduzibles Polynom 3. Grades mit r. g. Koeffizienten ist derart, daß die Kubik $f(x, y) = 0$ einen Rückkehrpunkt mit r. g. Koordinaten besitzt.

Wolfgang Gröbner.

• Walker, Robert J.: *Algebraic curves.* (Princeton Mathematical Series, No. 13.) Princeton, N. J.: Princeton University Press; London: Oxford University Press 1950. X, 201 p., 25 s. net.

Wie Verf. im Vorwort ankündigt, soll dieses Lehrbuch die Anfangsgründe für das Studium der algebraischen Geometrie vermitteln. Daher sind Darstellung und Methoden so gewählt, daß sie ohne spezielle Vorkenntnisse leicht verstanden werden können. Andererseits soll das Buch auch, ausgehend von den älteren analytischen und geometrischen Verfahren, zu den modernen algebraischen Methoden und abstrakten Begriffsbildungen hinführen; daher werden bei verschiedenen Gelegenheiten die wichtigsten Begriffe der modernen Algebra in kurzen Zügen eingeführt und bei den weiteren Betrachtungen verwendet. Die einzelnen Abschnitte sind jeweils mit instruktiven Beispielen und vielen, sehr gut gewählten Aufgaben ausgestattet. Als Vorbilder und Quellen für seine Darstellung nennt Verf. die „Vorlesungen über algebraische Geometrie“ von Severi-Löffler, die „Moderne Algebra“ und die „Algebraische Geometrie“ von B. L. van der Waerden, sowie Skripten nach Vorlesungen von S. Lefschetz und O. Zariski. Ohne im Aufbau und in den Beweisen von den bewährten und erprobten Gedankengängen wesentlich abzuweichen, hat Verf. ein sehr sorgfältig durchdachtes und mit peinlicher Genauigkeit ausgeführtes Werk geschaffen, das den ihm gestellten Zweck sicher voll erfüllen wird. — Im 1. Kap. wird die algebraische Theorie der Integritätsbereiche, insbesondere der Polynomringe und der Elimination entwickelt. Das sind die algebraischen Grundlagen, während die geometrischen Grundlagen, nämlich die wichtigsten Sätze der n -dimensionalen projektiven Geometrie und der linearen Transformationen im 2. Kap. Platz finden. Nach dieser Vorarbeit führt Verf. im 3. Kap. die erste Untersuchung der ebenen algebraischen Kurven vom Standpunkt der projektiven Geometrie durch und zeigt, daß die Singularitäten mittels quadratischer Transformationen aufgelöst werden können. Das 4. Kapitel ist den formalen Potenzreihen einer Variablen gewidmet, womit die analytischen Hilfsmittel bereitet sind, um die Reihenentwicklung einer algebraischen Funktion durchzuführen und die Parameterdarstellungen für die Zweige einer algebraischen Kurve zu gewinnen. Es folgt die Definition der Multiplizität eines Schnittpunktes und der Bézoutsche Satz für zwei ebene Kurven, ferner die erste Hälfte der Plückerschen Formeln und der Noethersche Fundamentalsatz. Das 5. Kap. beginnt mit einer kurzen Besprechung der Ideale eines Ringes, sowie der transzendenten und algebraischen Erweiterungen eines Körpers. Es folgen die Darstellungen der rationalen und birationalen Transformationen, die ihrem Wesen nach Homomorphismen und Isomorphismen der entsprechenden Funktionenkörper sind, ferner der Satz von Lüroth, die dualen Transformationen und die zweite Hälfte der Plückerschen Formeln. Mit einem Ausblick auf die Idealtheorie und die Bewertungstheorie schließt das Kapitel. Das letzte, 6. Kap. behandelt die Theorie der linearen Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve; in der üblichen Weise gelangt Verf. über die Begriffe Vollschar, Jacobische und kanonische Schar zum Begriff des Geschlechtes und zu den weiteren klassischen Sätzen der Kurventheorie. Mit dem ausführlich behandelten Beispiel der elliptischen Kubik schließt das Buch.

Wolfgang Gröbner.

Masotti Biggiogero, Giuseppina: *Sulle singolarità della curva hessiana.* Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 277—289 (1949).

L'A. riprende il problema di determinare la singolarità della Hessiana H di una curva piana algebrica F in una singolarità assegnata della F . Il problema di determinare, in ogni caso, la molteplicità di H , in un punto di F di assegnata molteplicità, è stato risolto in due modi diversi dal Recensore (questo Zbl. 4, 269; 5, 116, 370). Anche le tangenti di H sono state determinate in ogni caso dal Recensore (questo Zbl. 5, 370). L'A. dimostra che: a) in un generico punto r -plo O della F , origine di r rami lineari distinti, la H presenta $3r - 4$ rami lineari distinti (r dei quali tangenti ai rami della F); b) in un generico punto r -plo O della F , origine di un ramo superlineare di ordine r e classe 1, la H presenta due rami superlineari degli ordini r e $r - 2$, entrambi di classe 1 e tangenti al ramo della F , e $r - 1$ rami lineari distinti, nessuno dei quali tangente al ramo della F ; c) in un generico punto r -plo O della F , origine di r rami lineari distinti, aventi tra loro a due a due contatto

s-punto, la H presenta $3r - 3$ rami lineari distinti, aventi tra loro e coi rami della F contatto *s*-punto, e soltanto *s*-punto.

Mario Villa.

Benedicty, Mario: Sopra le trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro, in particolare nel caso di genere effectivo nullo. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 4, 157—173 (1950).

Severi (Funzioni quasi-abeliane, Roma 1947) a introduit des champs neutres constitués par une courbe C de genre effectif p , sur laquelle on a fixé δ_1 couples neutres formés de couples de points distincts et δ_2 couples neutres formés de couples de points confondus. Un tel champ est dit de genre virtuel $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$. L'A. considère les transformations birationnelles de la courbe C en soi, conservant les couples neutres et plus particulièrement dans le cas où la courbe C est rationnelle ($p = 0$). Il élimine tout d'abord les cas triviaux $\pi = 0$, $\pi = 1$, puis le cas $p = 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$, où les transformations considérées forment évidemment deux séries. Dans les autres cas, il ne peut exister qu'un nombre fini de transformations du champ neutre en soi et toute transformation birationnelle d'un tel champ est cyclique (généralisation du théorème der Schwarz-Klein). L'A. étudie minutieusement les cas qui peuvent se présenter, en considérant notamment les intégrales normales virtuelles de première espèce attachées au champ. Enfin, il considère les transformations induites sur la variété de Jacobi attachée au champ et retrouve des transformations considérées par Conforto [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 273—291 (1948)].

Lucien Godeaux.

Châtelet, François: Représentation des courbes par radicaux. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 73—75 (1950).

Verf. gibt eine Lösung des von Lebesgue aufgegebenen Problems, für eine vorgelegte ebene algebraische Kurve C eine Parameterdarstellung zu suchen, bei welcher höchstens quadratische Irrationalitäten verwendet werden, und zwar unter der einschränkenden Voraussetzung, daß umgekehrt der Parameter t selbst und alle angeführten Quadratwurzeln rationale Funktionen der Koordinaten x, y von C sind; in diesem Fall ist C birational äquivalent einer Kurve Γ mit den Gleichungen $t_1^2 = f_1(t), t_2^2 = f_2(t, t_1), \dots, t_n^2 = f_n(t, t_1, \dots, t_{n-1})$. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß eine Folge von Kurven C, C_1, \dots, C_n existiert, welche aufeinanderfolgend in Korrespondenz $(2, 1)$ stehen und deren letzte unikursal ist. — Verf. bespricht noch das verschärfte („arithmetische“) Problem, daß auch die in der Parameterdarstellung auftretenden numerischen Koeffizienten keine anderen Irrationalitäten (über dem rationalen Grundkörper) enthalten als ineinandergeschachtelte Quadratwurzeln.

Wolfgang Gröbner.

Pompilj, Giuseppe: Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 77—93 (1949).

L'A. sfruttando anche idee di B. Segre [Accad. Ital., Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur. 1, Mat. Nr. 4 (1930)], Chisini-Manara [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 25, 255—265 (1946)] caratterizza la curva di diramazione D dei piani quadrupli che ammettono un modello proiettivo d'equazione: $z^4 + 6p_{2m}z^2 + 4q_{3m}z + r_{4m} = 0$ con p_{2m}, q_{3m}, r_{4m} generici polinomi in x, y di grado $2m, 3m, 4m$ mediante le seguenti condizioni: a) D è una curva irriducibile d'ordine $12m$ con un gruppo H di $24m^2$ cuspidi e $12m^2$ nodi su cui vanno a coppie a sovrapporsi i $24m^2$ punti di un gruppo E . b) Si verifica l'equivalenza neutra rispetto ai nodi: $H \equiv 2mR$ e quella $E \equiv 2mR$ (R sezione rettilinea di D). c) La serie lineare segata su D dalle curve d'ordine m non è completa. — Tutti i piani quadrupli che hanno per curva di diramazione una siffatta D_{12m} sono birazionalmente identici.

Federico Gaeta.

Gambier, Bertrand: Points et tangentes d'inflexion d'une cubique plane de genre un. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 13—16 (1949).

Si ritrova un risultato di Laguerre sulle coniche toccate da sei tangenti d'inflexione di una cubica piana ellittica.

Mario Villa.

Vektor- und Tensorrechnung:

Golab, St.: Contribution à la théorie des objets géométriques. Prace mat.-fiz., Warszawa 47, 1—15 (1949).

Verf. betrachtet spezielle geometrische Objekte mit einer Bestimmungszahl in einem eindimensionalen Raum X_1 . Die Transformationsformel eines solchen Objektes der Klasse n im Punkte ξ_0 unter der Transformation $\xi' = \varphi(\xi)$ in X_1 lautet $\Omega' = f(\Omega, \varphi', \dots, \varphi^{(n)})$, wo $q^{(i)}$ die i -te Ableitung der Funktion φ im Punkte ξ_0 ist. Es wird gezeigt, daß geometrische Objekte dieser Art für $n \geq 4$ und für die allgemeine Pseudogruppe $\mathfrak{G}(\xi' = \varphi(\xi))$ nicht existieren. Für bestimmte Untergruppen von \mathfrak{G} kann aber ein solches Objekt existieren. Verf. gibt ein Beispiel. (Vgl. auch St. Gołab, dies. Zbl. 31, 275.)

Johannes Haantjes.

Gołab, St.: Sur les objets géométriques à une composante. Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 79—89 (1950).

In dieser Arbeit korrigiert Verf. einen Fehler einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 32, 311). Es handelt sich um die Bestimmung aller geometrischen Objekte der Klasse 1 mit einer Bestimmungszahl in einer X_2 (vgl. vorstehendes Ref.). Diese Objekte sind von zweierlei Art. Beispiele sind 1. eine Dichte, 2. der Quotient der Bestimmungszahlen eines Vektors.

Johannes Haantjes.

Penzov, Ju. E.: Über differentialgeometrische Objekte der Klasse v in X_1 . Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 161—182 (1950) [Russisch].

Der Begriff des differentialgeometrischen Objekts stammt von Veblen, die Theorie ist aber weitgehend durch den Russen Vagner gefördert worden, an den sich die vorliegende Arbeit auch anschließt. Unter einem differentialgeometrischen Objekt der Klasse v von N Komponenten auf der Geraden X_1 mit der Koordinate ξ wird ein System von N Funktionen $\Omega^a (a = 1, \dots, N)$ verstanden, die sich bei der Koordinatenänderung $\xi' = f(\xi)$ nach den Formeln (1) $\Omega'^a = F^a(\Omega^1, \dots, \Omega^N; f', f'', \dots, f^{(v)})$ umsetzen, also von den Ableitungen von f bis zur v -ten abhängen. Im § 1 wird dann definiert: Ein Objekt von $N > N'$ Komponenten heißt Fortsetzung eines von N' Komponenten, wenn die Komponenten des einen auch im anderen vorkommen; durch Ableitungen erhält man triviale Beispiele für Fortsetzungen. Objekte mit den gleichen Transformationsgleichungen heißen „vom gleichen Typus“; unter allen vom gleichen Typus gibt es solche, deren Komponenten in einem bestimmten Koordinatensystem konstant sind. Ferner heißt ein Objekt transitiv, wenn die rechten Seiten von (1), als Funktionen von ξ und den f betrachtet, keine funktionale Abhängigkeit ergeben. Schließlich heißen 2 Objekte ähnlich, wenn ihre Komponenten durch dasselbe System von Übergangstransformationen, unabhängig vom Koordinatensystem, ineinander transformiert werden können. Damit ein Objekt vorliegt, haben die in (1) auftretenden Funktionen F^a gewissen, sich aus dem Übergang zwischen 3 Koordinatensystemen 0, 1, 2 ergebenden Bedingungen zu genügen; in diesen Bedingungen kommen die Ableitungen $f^{(2)}(\xi)$, $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(0)}(\xi)$ der Übergangstransformationen vor. Faßt man darin die $f^{(1)}(\xi)$ als Parameter und die übrigen als Variablen auf, so definieren diese Formeln eine v -parametrische Liesche Gruppe $\mathfrak{B}^{(1,v)}$, nimmt man dagegen die $f^{(0)}(\xi)$ als Parameter an, so ergibt sich die Gruppe $\mathfrak{A}^{(1,v)}$. $\mathfrak{B}^{(1,v)}$ und $\mathfrak{A}^{(1,v)}$ sind die beiden Parametergruppen einer Lieschen Transformationsgruppe und daher isomorph. Die Aufsuchung aller nicht ähnlichen Objekte der Klasse führt dann darauf, die Systeme der Imprimitivität der Gruppe $\mathfrak{B}^{(1,v)}$ oder alle Untergruppen von $\mathfrak{A}^{(1,v)}$ aufzusuchen. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich der § 3; es ergibt sich, daß die Lösung derselben sich auf verschiedene Systeme linearer Gleichungen zurückführen läßt. Jede so gefundene Untergruppe von $h (< v)$ Parametern führt dann zu einem entsprechenden Objekt der Klasse v mit $v - h$ Komponenten. Wichtig ist noch folgendes Lemma: Jedes transitive Objekt der Klasse v mit N Komponenten ist ähnlich zu der Fortsetzung eines solchen von niederer Klasse und mit $N - 1$ Komponenten, also auch einem von einer Komponente. Im § 5 wird danach bewiesen, daß $2N + 1$ die höchste Klasse eines transitiven Objekts von N Komponenten ist. Nachdem allgemein gezeigt worden ist, daß das gestellte Problem, alle Objekte von N Komponenten zu finden, auf die Lösung endlich vieler algebraischer Gleichungen und eines

Differentialgleichungssystems 1. Ordnung für eine unbekannte Funktion zurückgeführt werden kann, werden in den letzten Paragraphen alle Objekte von 1 und 2 Komponenten explizit aufgestellt. Bei $N = 1$ gibt es 3 Objekte mit den folgenden Transformationsformeln:

$$\Omega = \frac{\Omega}{f}, \quad \Omega = \frac{\Omega}{f} - \frac{f''}{f^2}, \quad \Omega = \frac{\Omega}{f^2} + \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f^4} - \frac{f'''}{f^3}.$$

Diese, zu Paaren genommen, und noch 4 weitere Typen sind dann die 7 wesentlich verschiedenen Objekte mit 2 Komponenten. Werner Burau.

Dufresnoy, Jacques et André Revuz: *Introduction au calcul différentiel extérieur tensoriel*. Bull. Techn. Univ. Istanbul 2, 13—26 und türkische Zusammenfassg. 13 (1949).

Ausdehnung des in einem vorhergehenden Artikel (dies. Zbl. 34, 357) vom Standpunkt der klassischen Analysis aus behandelten Kalküls auf Tensoren im euklidischen Raum (mit Kartesischen und krummlinigen Koordinaten) und im Riemannschen Raum. Otto Volk.

Seugling, W. R.: *Equations of compatibility for finite deformation of a continuous medium*. Amer. math. Monthly 57, 679—681 (1950).

Bei einer endlichen Deformation eines stetigen Mediums im dreidimensionalen euklidischen Raum: $ds_0^2 = h_{ij} dx^i dx^j \rightarrow ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ (x^i krummlinige Koordinaten) ergeben sich aus dem Umstand, daß die Riemannschen Tensoren verschwinden müssen, für den Tensor $2e_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ Bedingungen von der Form $e_{ijk\ell} + h^{\alpha\beta}(e_{jk\beta}e_{i\ell\alpha} - e_{j\ell\beta}e_{ik\alpha}) = 0$; dabei ist $e_{ijk} = e_{ik,j} + e_{kj,i} - e_{ij,k}$, $e_{ijk\ell} = e_{jk\ell,i} - e_{j\ell,i,k}$, die kovarianten Ableitungen sind gebildet bezüglich g_{ij} , und es ist $h^{ij} = H^{ij} : |h_{ij}|$, wo H^{ij} das algebraische Komplement von h_{ij} in $|h_{ij}|$ bedeutet. Eduard Rembs.

Tola Pasquel, José: *Algebraische Theorie der Motoren und ihre Anwendungen auf die Mechanik*. Rev. Ci., Lima 52, 5—48 (1950) [Spanisch].

Didaktische Darstellung der Theorie, die dem Titel entspricht. Die einzige gegebene Referenz bezieht sich auf L. Brand (Vector and tensor analysis, New York 1947; dies. Zbl. 32, 306). German Ancochea.

Blaschke, Wilhelm: *Contributi alla cinematica*. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 268—280 (1949).

The paper contains some results on plane cinematic in part already given by the author in previous notes. The contact transformation L of Lie which transforms oriented spheres into straight lines and tangent spheres into coplanar straight lines is shown to be the product of two more simple transformations: the „isotropic“ projection I and the „cinematic“ projection C . Let $\{O; e_1\}$ be a line element on the plane E_2 defined by the point O and the unit vector e_1 ; let e_2, e_3 be two unit vectors such that $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ be an orthogonal frame (e_2 contained in E_2). The isotropic projection transforms the straight lines $O + \lambda(e_2 + e_3)$ into the line elements $\{O; e_1\}$. If P is the center and 2ω the angle of the rotation which carries a fixed line element $\{O'; e'_1\}$ on $\{O; e_1\}$, the cinematic projection is then defined by $Q \rightarrow \{O; e_1\}$ where $Q = P + e_3 \cot \omega$. The continuous motions M_{II} depending on two parameters are then studied. To each M_{II} corresponds by I^{-1} and C^{-1} two surfaces in E_3 (S_{II} and T_{II} respectively) equivalent by L . Special interest has the case in which M_{II} contains two pencils of continuous rotations; the corresponding surface T_{II} is then a quadric surface and some consequences can be deduced (for instance an elegant interpretation of the theorem of Ivory on confocale conics). Finally some possible generalizations to the cinematic in E_3 or E_4 and on the sphere are briefly indicated.

L. A. Santaló.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

• Stork, Karl: *Tangentengekoppelte Raumkurvenpaare mit proportionalen Bogenlängen*. (Diss.). Marburg: 1949. 56 S.

Im ersten Teile behandelt Verf. die Aufgabe, zu einer gegebenen Stützkurve

$r_1 = r_1(s_1)$ die Kopplungskurve $r_2 = r_2(s_2)$ zu bestimmen, deren Tangenten auf der Stützkurve proportionale Bogenlängen zu jenen der Kopplungskurve ausschneiden. Es wird die Vektor-Differentialgleichung der Kopplungskurve aufgestellt und geometrisch gedeutet: die Tangente der Stützkurve liegt in der Schmiegeebene der Kopplungskurve; ferner wird das begleitende Dreibein der Kopplungskurve eingehend untersucht und gezeigt, daß durch Einführung geeigneter „Kopplungskoordinaten“ das Problem der Auffindung der Kopplungskurven zu einer gegebenen Stützkurve auf die Integration eines simultanen Systems von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Auch werden die das Problem kennzeichnenden einfachen Beziehungen zwischen den Bewegungsinvarianten der Einzelkurven und den Kopplungskoordinaten angegeben. Es folgt die Untersuchung des Umkehrproblems: Gegeben ist die Kopplungskurve, und es wird nach derjenigen Kurve gefragt, auf der durch die Tangenten der Kopplungskurve gleiche Bogenelemente herausgeschnitten werden; es führt auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Während nämlich bei gegebener Stützkurve durch jeden beliebigen Punkt im Raume eine Kopplungskurve gelegt werden kann, ist beim Umkehrproblem die Wahl des Punktes insofern beschränkt, als er auf einer Tangente der Kopplungskurve liegen muß. Auch die Frage nach dem Verhalten der Kopplungskurve im Kollisionspunkte und in dessen Umgebung wird für eine beliebige Stützkurve unter besonderen Anfangsbedingungen ausführlich behandelt. Schließlich wird gezeigt, daß solche Kurvenpaare durch Angabe einer einzigen Funktion der Bogenlänge s_1 eindeutig bestimmt sind. Diese sog. „reduzierende Funktion“ enthält bereits die das Kurvenpaar kennzeichnenden Eigenschaften. Gibt man umgekehrt gewisse Eigenschaften des Kurvenpaares vor, die zu seiner eindeutigen Bestimmung hinreichend sind, so ist dadurch die Existenz der zugehörigen reduzierenden Funktion gesichert und damit auch die des Kurvenpaares selbst. — Im zweiten Teile werden tangentegekoppelte ähnliche Raumkurvenpaare mit proportionalen Bogenlängen untersucht; es werden ihre Gestalt und ihre gegenseitige Lage bestimmt. Die so erzeugten Kurven ergeben sich als Schnitt einer Rotationsfläche und einer logarithmischen Schraubenfläche und werden als logarithmische Raumschrauben bezeichnet. Ein etwaiger Kollisionspunkt ist asymptotischer Punkt. Im besonderen werden die Fälle der ähnlichen Lage und der Kongruenz der Kurven sowie das ebene Problem behandelt.

Otto Volk.

Hoborski, A. et S. Golab: Sur les lignes de courbure spéciales. *Prace mat.-fiz.*, Warszawa 47, 17—20 (1949).

Auf einer Fläche $\mathfrak{r}(u^1, u^2)$ heißt die Kurve $u^i(s)$ eine „spezielle“ Krümmungslinie, wenn nicht nur die Rodriguessche Gleichung gilt: $(n_i - \lambda \mathfrak{r}_i) du^i ds = 0$ — (n = Einheitsvektor der Flächennormale, Index $i = \partial_i \partial u^i$) —, sondern schärfer (*): $n_i - \lambda \mathfrak{r}_i = 0$ ($i = 1, 2$). Diese Kurven sind dadurch gekennzeichnet, daß sie aus Nabelpunkten bestehen. Verf. beweisen das, indem sie durch eine umständliche Rechnung aus (*) die für Nabelpunkte kennzeichnenden Gleichungen $L_{ik} = -\lambda g_{ik}$ herleiten (g_{ik} , L_{ik} = Koeffizienten der 1. und 2. Grundform). Man erhält diese aber sofort, indem man (*) mit \mathfrak{r}_k skalar multipliziert.

Helmut Gericke.

Özkan, Asim: Les surfaces réelles pour lesquelles la seconde beltramienne de la courbure moyenne ou de la courbure de Gauss est nulle. *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A* 15, 214—288 und türkische Zusammenfassg. 213—214 (1950).

Verf. nimmt unter Verwendung der invarianten Ableitungen und des darauf begründeten Kalküls die Untersuchungen von Mehmet Anas (dies. Zbl. 27, 344) über Flächen, für die Beltramis zweiter Differentiator, angewandt auf die mittlere Flächenkrümmung, verschwindet, wieder auf und führt sie weiter. Es werden nicht nur, wie bei Anas, Torsen und Drehflächen dieses Typus, sondern auch Dupinsche Zykliden, Röhrenflächen, isotherme Kanalfächen, isotherme W -Flächen und Gsimflächen, deren nicht ebene Krümmungslinien auf einer Kugel liegen, betrachtet

und zahlreiche spezielle Sätze abgeleitet. Die Wahl spezieller Parameterlinien bringt naturgemäß vielfach Vereinfachungen mit sich. — Die gleichen Fragestellungen und Flächentypen werden nun auch für die Familie aller Flächen behandelt, für die nunmehr die zweite Beltramische Ableitung des Gaußschen Krümmungsmaßes verschwindet. — Als Einleitung der sehr umfangreichen Abhandlung wird das Operieren mit invarianten Ableitungen ausführlich dargestellt, wobei zahlreiche Ergebnisse aus W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (3. oder 4. Aufl., Berlin 1945), Kap. 5 und 6, angeführt werden. *Hans R. Müller.*

Mineo, Corradino: Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 213—216 (1950).

Nouvelle démonstration du théorème de Weingarten-Mangoldt sur les surfaces désignées par le titre du travail. La démonstration se trouve dans l'ordre d'idées de celle donnée par Darboux (1894) et précisée par l'A. (1918); mais elle est beaucoup plus simple, ne faisant guère usage de calculs. *German Ancochea.*

Rossier, Paul: Sur la construction des géodésiques des surfaces de révolution. Arch. Sci., Genève 3, 448—450 (1950).

Rossier, Paul: Sur le théorème de Gauss relatif à la conservation de la courbure intérieure d'une surface lors d'une flexion. Arch. Sci., Genève 3, 450—452 (1950).

Efimov, N.: Über Starrheit im Kleinen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 761—764 (1948) [Russisch].

Beweis für die Existenz beliebig kleiner starrer, d. i. infinitesimal unverbiegbarer Flächenstücke mit Flachpunkt: „Fast alle“ Flächen $z = F^{(9)}(x, y) + F^{(10)}(x, y) + \dots$ sind starr, z. B. $z = x^9 + x^3 y^6 + y^9$. Vermutung des Verf.: Gültigkeit des Satzes für die Flächen der Form $z = F^{(n)}(x, y) + F^{(n+1)}(x, y) + \dots$ mit $n \geq 4$. Bekanntlich kann Starrheit nicht aus etwa schon bekannter endlicher Unverbiegbarkeit gefolgert werden. *Eduard Rembs.*

Lejbin, A. S.: Über die Verbiegbarkeit konvexer Flächen mit Rand. Uspechi mat. Nauk, 5, Nr. 5 (39), 149—159 (1950) [Russisch].

Aus einer, nicht notwendig endlichen, konvexen Fläche denke man sich ein von einer Jordankurve γ begrenztes Gebiet herausgeschnitten; es entsteht dann die von γ berandete Fläche Φ . Unter $H(\Phi)$ und $E(\Phi)$ werden dann diejenigen Flächen verstanden, die die räumlichen Bereiche H und E begrenzen, wobei H und E den kleinsten und größten konvexen Bereich bedeuten, der Φ enthält. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist dann der folgende Satz: Wenn $E(\Phi)$ nicht mit $H(\Phi)$ zusammenfällt, ist Φ verbiegbar. Hiermit ist die Verbiegbarkeit sehr vieler Flächen gezeigt: z. B. erfüllt jede Fläche Φ , die aus einer konvexen durch Entfernung eines Gebietes positiver Krümmung entstanden ist, die Voraussetzungen des Satzes. Denn in § 2 wird gezeigt, daß das Gebiet D , das Φ zu $H(\Phi)$ ergänzt, überall die Krümmung 0 haben muß und aus zylindrischen oder ebenen Stücken besteht. Zum Beweis des Hauptsatzes wird ein Punkt P_0 in der Differenz $E - H$ der obigen konvexen Körper geeignet angenommen und die konvexe Hülle von H und P_0 betrachtet. Die Randfläche F_0 dieses konvexen Körpers $H + P_0$ besteht aus Φ und einem Teil T , der mit Ausnahme des Punktes P_0 überall die Krümmung 0 besitzt. Indem man T geeignet aufschneidet und zusammenklebt, was stets zu einer bis auf das herausgeschnittene Stück zu F_0 isometrischen Fläche führt, hat man automatisch auch Φ verbogen. Bei der Durchführung dieses Gedankens im einzelnen sind mehrere Fälle zu unterscheiden, die als besondere Sätze formuliert werden.

Werner Burau.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Rollero, Aldo: Ancora sulla rappresentazione delle trasformazioni puntuali fra piani mediante sistemi di equazioni differenziali. Euclides, Madrid 9, 375—378 (1949).

È immediata la possibilità di associare ad ogni trasformazione puntuale T fra due piani un sistema Σ di tre equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine. E tale sistema Σ è già stato utilizzato, per ricerche in grande su T , da altri Autori. L'A. mette in relazione Σ con sviluppi canonici che intervengono nello studio locale della T . Si deve però osservare che Σ può avere interesse per ricerche in grande su T ma non per ricerche di carattere locale. Mario Villa.

Villa, Mario e Guido Vaona: Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 101—107 (1950).

In una trasformazione puntuale fra due piani si possono considerare per ciascuno di questi le curve caratteristiche le quali in ogni loro punto risultano tangenti a una retta caratteristica. L'equazione differenziale $F(x, y, y') = 0$ di dette curve è algebrica del 3° ordine in y' e la sua curva discriminante viene studiata dagli AA. nel caso particolare in cui la trasformazione puntuale sia una trasformazione cremoniana; essi provano che le componenti semplici della Jacobiana fanno parte della curva discriminante come integrali singolari della $F(x, y, y') = 0$; lo stesso avviene per quelle componenti multiple nei cui punti le rette caratteristiche non siano indeterminate. Seguono alcuni esempi. Piero Buzano.

Longo, Carmelo: Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 320—325 (1950).

Le trasformazioni puntuali T fra due piani o spazi, in una coppia regolare (O, O') di punti corrispondenti, sono state ampiamente studiate dal Recensore [Atti Accad. Italia, Rend., VII. S. 3, 718—724 (1942), 4, 1—7, 137—142, 217—221 (1943), e questo Zbl. 27, 129, 348, 30, 216] e dal Bompiani [Atti Accad. Italia, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur. 13, 837—848 (1942), questo Zbl. 28, 419]. L'A. considera il caso particolare di due piani sovrapposti e di un punto unito $O \equiv O'$. Allora già l'intorno del 2° ordine di O individua, in generale, un riferimento proiettivo intrinseco. L'A. distingue tre casi secondo che le direzioni unite uscenti da O sono due distinte, due coincidenti, indeterminate e si trattiene sul significato geometrico degli invarianti del 1° e del 2° ordine. Mario Villa.

Sangermano, Cosimo: Le trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a Jacobiano nullo di caratteristica zero. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 260—267 (1949).

L'A. studia le trasformazioni puntuali T fra due piani in una coppia (O, O') di punti corrispondenti a Jacobiano nullo di caratteristica zero. Nell'intorno del 2°, del 3° e del 4° ordine della coppia (O, O') introduce vari enti geometrici (punti, rette, elementi, corrispondenze, curve) determinati da T . Per ottenere riferimenti proiettivi intrinseci, in entrambi i piani, occorre appunto considerare l'intorno del 4° ordine di (O, O') . Mediante gli enti geometrici considerati ottiene riferimenti proiettivi intrinseci (e quindi equazioni canoniche di T) e assegna il significato geometrico degli invarianti proiettivi del 3° ordine e di due invarianti del 4°.

Mario Villa.

Salini, Ugo: Trasformazioni razionali osculatrici ad una trasformazione puntuale fra due spazi ordinari in una coppia di punti ad Jacobiano nullo di caratteristica uno. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 1—27 (1949).

Salini, Ugo: Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia di punti ad Jacobiano nullo di caratteristica uno, quando la superficie Jacobiana presenta nel punto un punto doppio biplanare ed uno dei piani coincide col piano stazionario. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 229—245 (1949).

Le trasformazioni puntuali T fra due spazi S_r, S'_r in una coppia (O, O') di punti corrispondenti a Jacobiano nullo, sono state studiate dal Recensore (questo Zbl. 32, 186 e 34, 95) e, per $r = 2$, da Bompiani [Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci.

fis. mat. natur. **14**, 11—21 (1943)]. Il caso $r = 3$, nell'ipotesi che la caratteristica del determinante Jacobiano sia 1, limitatamente all'intorno del 2° ordine di (O, O') , è stato particolarmente studiato da Sangermano (questo Zbl. **31**, 414) e dall'A. (questo Zbl. **31**, 414). L'A. riprende a studiare questo caso. — Nella prima Nota considera l'intorno del 3° ordine di (O, O') e certe trasformazioni razionali osculatrici mediante le quali ottiene riferimenti proiettivi intrinseci. L'A. assegna anche un significato geometrico ai quattro invarianti del 2° ordine. — Nella seconda Nota considera l'ipotesi ulteriormente particolare in cui la superficie Jacobiana ha in O punto doppio biplanare ed uno dei piani coincide col piano stazionario. *Mario Villa.*

Longo, C.: Invarianti proiettivi di calotte del 3° ordine tangenti in un punto. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. **7**, 295—326 (1948).

L'A. determina gli invarianti proiettivi di due calotte σ_3, σ'_3 del 3° ordine di S_3 aventi lo stesso centro e lo stesso piano tangente. Rappresentate le calotte con i punti di uno spazio numerico proiettivo R , dove si assumono come coordinate del punto i coefficienti dell'equazione della calotta, si ha che un'omografia Ω di S_3 che lasci fissi gli elementi comuni a σ_3, σ'_3 , determina nello spazio R un'omografia se σ_3, σ'_3 hanno in comune la calotta del 2° ordine σ_2 , una particolare trasformazione quadratica T negli altri casi. Lo studio della trasformazione T ed in particolare la determinazione delle totalità invarianti di calotte nelle omografie Ω permette di determinare il numero degli invarianti delle due calotte σ_3, σ'_3 . Se σ_3, σ'_3 hanno la stessa calotta σ_2 , vi sono due invarianti, che si possono esprimere mediante gli invarianti di contatto relativi agli E_2 asintotici. Se σ_3, σ'_3 hanno in comune due, una, nessuna tangente asintotica gli invarianti sono rispettivamente tre, quattro, cinque. L'A. calcola e dà il significato geometrico di questi invarianti i quali si possono esprimere mediante quelli determinati dagli E_2 asintotici, dagli E_1 delle tangenti nodali e dagli E_1 delle tangenti di Darboux. Inoltre l'A. ritrova gli invarianti di σ_3, σ'_3 scegliendo un riferimento particolare relativo ad esse. Viene anche precisato il concetto di fascio determinato da σ_3, σ'_3 e si dà una costruzione geometrica, mediante particolari monoidi del 3° ordine passanti per le σ_3 , di una calotta appartenente al fascio stesso. *Mario Villa.*

Bompiani, Enrico: Sopra una nozione di spazio osculatore ad una varietà introdotta da L. Berzolari. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **5**, 213—218 (1950).

Let S_n be the n -dimensional projective space and V_m a m -dimensional variety ($1 < m < n - 1$) in it. Let S_m be the tangent m -space to V_m at a point O . Given in S_m a linear system of ∞^{M-1} [$M = \frac{1}{2} m(m+1) - 1$] quadratic cones with the point O for vertex, there exists a S_{m+1} through S_m such that any S_{n-1} through S_{m+1} intersects V_m in a V_{m-1} the tangent cone of which at O belongs to the given linear system. If S_n is the euclidean space and the linear system of quadratic cones is determined by the intersection of S_m with the absolute of the space, then S_{m+1} coincides with the osculating space to V_m as defined by Berzolari following an entirely different way [Atti reale Accad. Torino **33**, 692—700, 759—778 (1898)]. Some generalizations to pairs of tangent varieties are also considered. *L. A. Santaló.*

Terracini, Alessandro: Direttrici congiunte di una rigata. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **9**, 325—342 (1950).

Trattasi di un'interessante applicazione della nozione di ordine di approssimazione per l'incidenza di piani infinitamente vicini di un sistema ∞^1 di S_5 , introdotta nel 1936 dallo stesso Terracini (questo Zbl. **16**, 75) e da lui recentemente utilizzata in altra ricerca sulle rigate (questo Zbl. **37**, 244). Siano C_y e C_z due direttrici di una rigata R , luogo della retta yz : rappresentando le rette dello spazio ordinario nei punti della quadrica di Klein di S_5 , le striscie aderenti ad R lungo C_y e C_z danno per immagini due rigate (g_y) e (g_z) riferite fra loro per incidenza di generatrici omologhe. Nasce così in S_5 un sistema ∞^1 di piani $\pi = g_y g_z$ di cui ciascuno è incidente all'infinitamente vicino in un punto: a questo fatto fa riscontro

nello spazio ordinario l'esistenza di un complesso lineare H a cui appartengono i fasci delle tangenti ad R nei punti y e z e in quelli infinitamente vicini rispettivamente su C_y e C_z . Ora, poichè l'incidenza di ciascun piano π col consecutivo può aver luogo secondo un ordine di approssimazione espresso da un numero pari σ compreso fra 2 e 16, ne segue che anche l'appartenenza dei suddetti fasci di tangenti al complesso lineare H può verificarsi secondo un ordine σ di approssimazione: se la coppia di direttrici C_y, C_z è generica risulta $\sigma = 2$, mentre per particolari coppie di direttrici che il Terracini chiama congiunte e risp. bicongiunte può risultare $\sigma \geq 4$ e risp. $\sigma \geq 6$. Rappresentata analiticamente la rigata R al modo di Wilczynski, l'A. scrive e discute le condizioni perchè due direttrici siano congiunte e le ulteriori perchè siano bicongiunte. Dimostra così che ogni direttrice C_z (non asintotica e non coincidente con un ramo della linea flecnodale) possiede ∞^1 direttrici congiunte che si ottengono integrando un'equazione di Riccati: esse risultano pure congiunte ad altre ∞^1 direttrici che si chiamano associate a C_z e la cui relazione con C_z può anche esser definita in modo autonomo (ossia senza far ricorso alle curve congiunte). Una coppia di direttrici bicongiunte si individua invece assegnando su una generatrice una generica coppia di punti per cui debbano passare rispettivamente le due curve e prefissando in uno dei due punti anche la relativa tangente. Le nozioni di direttrici congiunte e bicongiunte sono invarianti per deformazioni proiettive.

Piero Buzano.

Saban, Giacomo: Sulle varietà quasi-asintotiche. I: Proprietà elementari collegate alla nozione di specie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 562—568 (1950).

Saban, Giacomo: Sulle varietà quasi-asintotiche. II: Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 55—61 (1950).

L'A. tratta delle varietà V_k subordinate ad una data V_m quasi-asintotiche secondo Bompiani [Proc. Vth internat. Congr. Math., Cambridge 2, 22—27 (1912)]. Nella Nota I si raccolgono alcuni teoremi ed osservazioni elementari su queste varietà ottenuti con metodo proiettivo. Data una V_k di V_m quasi-asintotica di indici r, s ($0 < r < s$) si distingue la „specie“ t secondo Villa [Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. S. 1, 228—237 (1940); questo Zbl. 24, 173] come differenza di dimensioni dello spazio congiungente degli spazi osculatori $S(r), S(s)$ a V_m, W_k in un punto di W_k quando W_k è qualsiasi varietà subordinata e quando è la quasi-asintotica V_k , e si danno alcuni teoremi intorno a questo carattere, ad es: se V_k è una quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$ di V_m è anche quasi asintotica $\sigma_{p,s}^{t'}$ con $r < p < s, t' \geq t$. — Nella Nota II si ottengono talune condizioni sufficienti affinchè le varietà subordinate di una V_k quasi-asintotica ad una V_m siano quasi-asintotiche della V_k o della V_m con particolare riferimento alle curve. Esse si esprimono mediante limitazioni a cui deve soddisfare t . I criteri ottenuti si applicano alle quasi-asintotiche tracciate sulle varietà di Segre ordinarie o generalizzate nel senso di Terracini-Bompiani-Godeaux (questo Zbl. 27, 334).

Federico Gaeta.

Villa, Mario e Guido Vaona: Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 470—476 (1950).

Secondo gli AA. una varietà V_t appartenente a una varietà V_m , contenuta a sua volta in V_k ($t < m < k$) dicesi, rispetto a queste, quasi-asintotica di indici ($p < q < r$) quando in ogni suo punto risulti inferiore all'ordinario la dimensione dello spazio congiungente gli spazi osculatori degli ordini p, q, r rispettivamente a V_k, V_m, V_t . In questo lavoro tale nozione viene messa in relazione con quella di curve caratteristiche di una trasformazione puntuale tra due spazi lineari

(curve tangenti in ogni loro punto a una delle direzioni caratteristiche già precedentemente considerate da Villa: questo Zbl. 30, 216). Si dimostra infatti che, ove si consideri la varietà di Segre rappresentante le coppie di punti dei due spazi lineari e in essa la varietà immagine della trasformazione puntuale, le curve caratteristiche risultano rappresentate da curve che, rispetto a detta coppia di varietà, hanno il comportamento di quasi-asintotiche di indici (1, 2, 3). *Piero Buzano.*

Vaona, Guido: Curve e superficie quasi-asintotiche della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 360—367 (1949).

L'A. determina le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$ e $\gamma_{1,3}$ e le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^q$ ($q = 1, 2, 3$) della varietà di Grassmann W che rappresenta le rette di uno spazio S_n , ottenendo i seguenti risultati: Le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$ di W sono tutte e sole le curve che sono immagini di superficie rigate sviluppabili o in particolare di cono o rigate piane. Inoltre: Le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2}$ di W sono tutte e sole quelle le cui tangenti giacciono su W . Le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ di W sono tutte e sole le curve che sono immagini di superficie rigate sgembe appartenenti a spazi S_3 di S_n . Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^1$ di W sono tutte e sole quelle che rappresentano V_3 , luogo di ∞^2 rette, aventi un piano tangente fisso lungo ogni retta. Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^2$ di W sono tutte e sole quelle che rappresentano V_3 , luogo di ∞^2 rette, aventi l' S_3 tangente fisso lungo ogni retta. Infine: Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^3$ di W sono, oltre ai piani, tutte e sole le superficie rappresentative dei cono proiettanti da un punto una superficie. Questi risultati lasciano intravedere l'esistenza di interessanti legami fra le varietà quasi-asintotiche delle grassmanniane ed i caratteri di sviluppabilità delle corrispondenti varietà luoghi di spazi da esse rappresentate. *Mario Villa.*

Terracini, Alessandro: Congruenze W . Mat., Catania 5, 83—90 (1950).

L'A. mette in relazione la teoria di Fubini delle congruenze W , fatta operando direttamente sulle falde focali, con quella di Tzitzeica che rappresenta la congruenza sulla quadrica di Klein: egli ottiene così un'interpretazione geometrica delle funzioni ausiliarie di Fubini. *Piero Buzano.*

Kasner, Edward and John de Cicco: Extensions of harmonic transformations. Amer. J. Math. 69, 575—582 (1947).

Eine harmonische Transformation wird durch zwei harmonische Funktionen X und Y von x und y mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante dargestellt. Es wird untersucht, wie sich bei einer derartigen Transformation die Elemente erster bis dritter Ordnung in einem Punkte verhalten. Bezüglich der Elemente erster und zweiter Ordnung zeigen die harmonischen Transformationen gegenüber allgemeinen Punkttransformationen keine Besonderheit; die Elemente erster Ordnung erfahren bei der Gesamtheit aller harmonischen Transformationen eine dreiparametrische Gruppe von Transformationen, die Elemente zweiter Ordnung eine achtparametrische Gruppe. Dagegen reduziert sich bei den Elementen dritter Ordnung die für allgemeine Punkttransformationen vorhandene fünfzehnparametrische Gruppe bei harmonischen Transformationen auf eine zwölfparametrische Menge ohne Gruppencharakter. *Walter Brödel.*

Backes, F.: Sur les cercles qui possèdent des sphères focales. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 513—520 (1950).

This paper deals with a specialized type of congruence of ∞^2 circles $\{F\}$, the specialty consisting in that the related focal surface π is compounded of two spheres. Broadly speaking, the author has established two distinct forms of criteria for a congruence (of circles) to be of the afore-said type. The first of these criteria connects the „characteristic“ point of the plane of any circle F (belonging to the congruence) with the pair of „characteristic“ points, associated with an arbitrary sphere that can be drawn through F ; the converse of this property is also verified. The second

criterion — necessarily equivalent to the first — has reference to the concyclic character of the two pairs of „characteristic“ points, attaching respectively to the arbitrary spheres that pass through a circle Γ of the (said) congruence; here also the converse property is substantiated. — The author then outlines several (independent) synthetic methods of generalizing an afore-mentioned variety of congruence of circles from any given two-parameter family of spheres. He concludes his papers by proving that any congruence of circles, cutting a fixed sphere orthogonally, belongs to the above category. — The use of a moving triad of (rectangular) axes and that of penta-spherical coordinates are remarkable features of this paper.

Haridas Bagchi.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Fáry, István: Quelques remarques sur la définition des espaces de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 1410—1412 (1950).

L'A. se propose de donner une définition intrinsèque des espaces de Riemann en s'efforçant d'atteindre directement les coordonnées normales ayant pour origine un point quelconque de l'espace. Sa construction repose sur les notions suivantes: un ensemble est un noyau N d'espace vectoriel s'il existe une application dans N d'une partie de $N \times N$ (application notée $x + y$) et une application dans N d'une partie de $R \times N$ (application notée λx) telles que lorsqu'elles sont définies, elles satisfont aux axiomes des espaces vectoriels et telles que $-x$ et $(1 - \lambda)x + \lambda y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) soient définis pour tout $x, y \in N$. Un tel noyau peut être identifié à une partie convexe, centrée à l'origine, d'un espace vectoriel réel E_n qui sera supposé de dimension finie n . Un isomorphisme de noyaux correspond à la restriction d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E_n est doué d'une structure d'espace euclidien, N est un noyau euclidien (admet un produit scalaire) et les isomorphismes correspondants sont alors des restrictions d'isomorphismes d'espaces euclidiens. Une fonction numérique f définie sur N est de classe r si $f[(1 - \lambda)x + \lambda y]$ est r fois continûment différentiable. Un espace métrique R est un espace de Riemann s'il satisfait aux quatre axiomes suivants: 1. chaque point a de R admet un voisinage N_a qui est un noyau euclidien d'origine a ; 2. si $K = N_a \cap N_b$ non vide, il existe un entier r appelé classe de l'espace tel que $C^r(K, a) = C^r(K, b)$, où $C^r(K, a)$ est la famille des fonctions de classe r dans K considéré comme partie de N_a ; 3. Si N'_a et N'_a sont deux noyaux autour du même a , l'application identique pour $x \in N_a \cap N'_a$ est un isomorphisme de noyaux euclidiens; 4. la distance $\varrho(a, x)$ donnée sur R coïncide avec la distance euclidienne de a à x pour x dans N_a . Des généralisations de ce type de définition sont esquissées (espaces de „paths“, espaces de Finsler).

André Lichnerowicz.

Hirsch, Guy: A propos d'un problème de Hopf sur les représentations des variétés. Ann. Math., Princeton, II. S. **50**, 174—179 (1949).

M^n und M_1^n seien zwei orientierbare geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten. r bzw. r_1 sei die untere Grenze des Abstandes je zweier konjugierter Punkte auf den Geodätischen von M^n bzw. M_1^n . v sei eine fest vorgegebene Zahl mit $0 < v < r$ und T eine eindeutige stetige Abbildung von M^n in M_1^n mit der Eigenschaft, daß für je zwei Punkte $p, q \in M^n$ aus $\varrho(p, q) = v$ stets $0 < \varrho(T(p), T(q)) < r_1$ folgt. Sind ferner e und e_1 die Eulerschen Charakteristiken von M^n und M_1^n , ist c der Abbildungsgrad von T , und ist $e \neq 0, e_1 \neq 0$, so ist $(e_1/e) \cdot c^2$ eine ungerade natürliche Zahl. Mit dem Beweis dieses Satzes liefert Verf. einen Beitrag zur Lösung eines von H. Hopf [z. B. Portugaliae Math. **4**, 129—139 (1944)] gestellten Problems: Ist M_1^n eine Sphäre und T eine stetige Abbildung von M^n in M_1^n mit $T(p) \neq T(q)$ für alle $\varrho(p, q) = v$, so gilt für den Abbildungsgrad $c \neq 0$. *Willi Rinow.*

Zhang, Ming-Yng: Die mittlere Krümmung einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Sci. Record, Acad. Sinica **3**, 35—39 (1950).

Wie in der Berwald-Cartanschen Theorie wird jedem Punkt des Finslerschen Raumes eine ausgezeichnete Richtung zugeordnet, welche in sämtlichen betrachteten Funktionen als Richtungsargument auftritt. Ist n^i der Normalenvektor im Punkt P zu der Fläche $x^i = x^i(u^\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$), t^i ein tangentialer Einheitsvektor in P , so wird die Normalkrümmung N der Fläche in P für die Richtung t^i (in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement in P) durch $N = n_i Dt^i/ds = \Omega_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$ definiert, wobei D das Symbol der Cartanschen kovarianten Differentiation ist. Die mittlere Krümmung M wird dann $g^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}$. Wenn man speziell das ausgezeichnete Linienelement in der Richtung der Tangente orientiert, wird dies zur Definition von Berwald [Mh. Math. Phys., Wien 43, 1—14 (1936); dies. Zbl. 14, 332]. An diese Arbeit knüpft Verf. eng an. Verf. betrachtet eine geschlossene Kurve K auf der Fläche und bezeichnet mit w^i den zu K im Punkt Q von K normalen Einheitsvektor auf der Fläche, mit $w^i(Q/P)$ den Resultatvektor, welcher durch Parallelverschiebung (im Cartanschen Sinn) längs einem beliebigen Bogen C in der Fläche von Q nach P entsteht, wobei P innerhalb des von K begrenzten Gebietes G der Fläche liegen muß. Die Arbeit gipfelt in folgender Behauptung: Ist Θ der Winkel zwischen $w^i(Q/P)$ und der Tangentialebene in P , so ist

$$M = \lim_{K \rightarrow P} \int_K \Theta ds \bigg/ \iint_G dO,$$

wobei dO das Flächenelement von G und ds das Linienelement von K bedeutet. (Dies ist die Verallgemeinerung eines Satzes von Calonghi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 11, 554—558 (1930)] für den dreidimensionalen euklidischen Raum.) Hierin dürften aber nach dem gegebenen Beweis nicht alle Voraussetzungen benannt sein. Der Beweis selbst zeigt einige Lücken — auch rechnerisch —, die eine genaue Kontrolle ausschließen.

Hanno Rund.

Segre, Beniamino: *Geometria non euclidea ed ottica geometrica. I, II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 16—19, 20—26 (1949).

Dans la première note, l'A. rappelle les notions fondamentales de l'optique géométrique dans un espace euclidien S_n , en particulier la notion de métrique de Fermat (métrique finslerienne) associée à l'indice du milieu optique envisagé. Pour que la métrique de Fermat soit riemannienne il faut et il suffit que le front d'onde élémentaire soit une hyperquadrique; le milieu est isotrope si le front d'onde élémentaire est une hypersphère. Si un milieu optique dans S_n est isotrope et tel que la lumière se propage selon des lignes à courbure constante, la métrique de Fermat correspondante est une métrique riemannienne à courbure constante. L'A. rappelle que ce cas ne peut se produire que pour cinq types de milieux optiques qu'il a déterminés antérieurement (B. Segre, ce Zbl. 34, 250; 35, 104). Une étude finie des fronts d'onde d'un milieu optique isotrope termine ce papier. — Le but principal de la seconde note est d'établir le théorème suivant déjà énoncé dans la première note: tout espace de Finsler qui admet une application ponctuelle dans l'espace euclidien faisant correspondre les hypersphères des deux espaces est un espace de Riemann à courbure constante. L'A. commence par établir que, sous les hypothèses faites sur l'espace de Finsler, celui-ci est certainement riemannien et conforme à l'espace euclidien (l'application envisagée étant conforme). Puis, il se pose le problème auxiliaire suivant: étant données dans S_n une famille à $(n+1)$ paramètres d'hypersurfaces, à quelles conditions existe-t-il une variété riemannienne V_n applicable conformément sur S_n , les hypersurfaces données étant les images des hypersphères de V_n . Il applique les résultats de son étude au cas où la famille donnée est la famille des hypersphères euclidiennes et en déduit le théorème énoncé.

André Lichnerowicz.

Einstein, A.: *The Bianchi identities in the generalized theory of gravitation.* Canadian J. Math. 2, 120—128 (1950).

Diese Arbeit muß im Zusammenhang mit den Arbeiten von Einstein [Ann. Math., Princeton, II. S. 46, 577—584 (1945); Rev. modern Phys., New York 20, 35—39 (1948)] sowie Einstein und Straus [Ann. Math., Princeton, II. S. 47, 731—741

(1946)] betrachtet werden. Es handelt sich um eine unifizierende Feldtheorie, die von einem nicht symmetrischen Fundamentalaffinor $g_{i\bar{h}} = g_{(i\bar{h})} + g_{[i\bar{h}]}$ ausgeht. Von Einstein und Straus wurde bewiesen, daß sich unter gewissen Voraussetzungen über $g_{i\bar{h}}$ eindeutig eine nicht symmetrische Übertragung $\overset{+}{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}}, \overset{+}{\Gamma}_{[j\bar{i}]}^{\bar{h}} = S_{ji}^{\bar{h}}$, ableiten läßt, die zusammen mit der „konjugierten“ $\bar{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}} = \overset{+}{\Gamma}_{(ji)}^{\bar{h}} - S_{ji}^{\bar{h}}$ die kovariante Ableitung von $g_{i\bar{h}}$ verschwinden läßt, wenn $\overset{+}{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}}$ auf den ersten und $\bar{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}}$ auf den zweiten Index angewandt wird. Der ursprüngliche Gedanke, $g_{[i\bar{h}]}$ und $S_{ji}^{\bar{h}}$ imaginär zu wählen, scheint verlassen zu sein, und die Theorie nähert sich damit der letzten Gestalt der affinen Feldtheorie Schrödingers [Proc. Irish Acad. A 51, 163–171 (1947); 51, 205–216 (1948); 52, 1–9 (1948)]. Der Ricci-Affinor R_{ji} , der in der üblichen Weise durch Faltung der Krümmungsgröße entsteht, geht, wenn man $g_{i\bar{h}}$ durch g_{hi} ersetzt, dann und nur dann in R_{ij} über, wenn $S_{hi}^{\bar{h}} = 0$. Zu dieser Gleichung werden als weitere Feldgleichungen angesetzt: $R_{(ji)} = 0$, $\partial[kR_{ji}] = 0$ und $\overset{+}{\nabla}_j g_{i\bar{h}} = 0$ ($R_{ji} = 0$, bzw. $R_{\bar{h}i}^{\bar{h}} = 0$, bzw. $g_{\bar{h};j}$ in der Schreibweise des Autors).

Die drei letzten Gleichungen lassen sich auch aus einem Variationsprinzip gewinnen, wenn man die erste und $\hat{e}_j g^{[ij]} = 0$; $g^{ji} = g g^{ji}$ voraussetzt. Referent möchte zu allen Ausführungen dieser Art bemerken, daß die Differentialkomitanten der Felder $g_{(i\bar{h})}$ und $g_{[i\bar{h}]}$ die algebraischen Komitanten sind: 1. dieser beiden Größen; 2. der Krümmungsgröße in bezug auf irgendeine invariant aufgefundene Übertragung, also etwa $\left\{ \overset{+}{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}} \right\}$, berechnet aus den $g_{(i\bar{h})}$; 3. der kovarianten Ableitungen aller dieser Größen. Im Gegensatz zu den projektiven und konformen Unifizierungstheorien kann also auf diesem Wege niemals etwas wesentlich Neues entstehen. Höchstens ergibt sich ein fruchtbares heuristisches Prinzip für die Auffindung einer geeigneten Weltfunktion. In der ersten der obengenannten Arbeiten hat Verf. selbst bemerkt, daß in seiner Theorie der symmetrische und der alternierende Teil von $g_{i\bar{h}}$ eindeutig bestimmt sind und somit lose nebeneinander stehen bleiben. Von diesen losen Bestandteilen ausgehend ist dann die Wahl irgendwelcher der vielen möglichen, invariant ableitbaren Übertragungen grundsätzlich nebensächlich.

J. A. Schouten.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Waag, Eduard Johannes van der: Sur quelques notions fondamentales de la géométrie différentielle. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 1026–1027 (1950).

Es sei k ein Bogen (vermutlich im E_3 ; es wird dies aber nicht ausdrücklich vermerkt). (A) Manspricht von ordinärer bzw. kontrastanter bzw. uniformer Äquivalenz (von Bogen und Sehne) im Punkt $O \in k$, wenn $\lim (\text{arc } AB) : (\text{corde } AB) = 1$ ist für $A = O, B \rightarrow O$ bzw. $A, B \rightarrow O$ mit O zwischen A und B auf k bzw. $A, B \rightarrow O$ beliebig. Behauptet wird: Jede dieser Äquivalenzen zieht im allgemeinen die nachfolgende nicht nach sich. — Folgende Aussagen sind gleichwertig: (1) In einer Umgebung U von O auf k ist k rektifizierbar und in O herrscht uniforme Äquivalenz; (2) Es existiert eine Parameterdarstellung $p(t)$ für U derart, daß $\lim |p(t_2) - p(t_1)| : |t_2 - t_1|$ existiert und nicht Null ist. — Ist k ein rektifizierbarer ebener Bogen, so herrscht in O ordinäre Äquivalenz, wenn und nur wenn für eine Umgebung U von O auf k eine Darstellung $x = x(t), y = y(t)$ existiert, derart daß

$$\lim ((x(t))^2 + (y(t))^2) : t^2 = q > 0$$

vorhanden ist, die Derivierten von x und y beschränkt sind sowie x', y' fast überall existieren mit $\lim ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) = q$. — (B) Es werden 8 Definitionen für eine Schmiegenebene an k in O betrachtet und Sätze über ihre gegenseitige Abhängigkeit angegeben. — Keine Beweise und keine Literaturangaben.

Otto Haupt.

Waag, Eduard Johannes van der: Sur quelques notions fondamentales de courbure. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 1120—1122 (1950).

Es werden verschiedene Definitionen der Krümmung eines Bogens k (im euklidischen E_2 und E_3), z. B. die klassische, sowie die von Alt, Gödel und Menger untersucht und Sätze behauptet, wie z. B. folgender: Besitzt k in O eine ordinäre Tangente, existieren ferner die beiden Gödelschen Schmiegehalbebenen sowie die Gödelsche Krümmung in O , letztere verschieden von Null, so existiert die Gödelsche Schmiegeebene in O . — Keine Beweise und keine Literaturangaben. *O. Haupt*.

Lojasiewicz, S.: Sur la relation entre la largeur d'un contour plan et la déviation de ses arcs partiels. Ann. Soc. Polonaise Math. **23**, 21—42 (1950).

Verf. beweist folgende Sätze, aus denen sich unter anderem ein einfacher Beweis dafür ergibt, daß im Innern jeder geschlossenen Charakteristik eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung ein singulärer Punkt des Systems liegt. — Definitionen. Ist $X = X(t)$ ein einfacher Bogen \mathfrak{B} in der euklidischen Ebene ($a \leq t \leq b$), so verstehe man unter der Deviation $D(\mathfrak{B})$ von \mathfrak{B} das Maß des (kleinsten) Winkels, in dem alle orientierten Sehnen $X(t_1), X(t_2)$, $t_1 < t_2$, enthalten sind. Unter der Breite $B(J)$ einer Jordanschen Kurve J werde verstanden die obere Grenze der Durchmesser derjenigen offenen Kreisscheiben, die im Innern von J enthalten sind. Ferner: Es sei $R(d, \alpha)$ das System aller rektifizierbaren Jordankurven, deren Länge größer als d ist und derart, daß die Deviation eines jeden Teilbogens der Länge d nicht größer ist als α ; es wird dann gesetzt $g(\alpha) = d^{-1} \inf (B(J); J \in R(d, \alpha))$, wobei die rechte Seite von d unabhängig ist ($0 < \alpha < \pi$; $d > 0$). — Sätze: (1) Ist $J \in R(d, \alpha)$, so ist $B(J) \geq \text{Max}(dg(\alpha), 2^{-1}d(\cos(\alpha/2))^2(1 + \cos(\alpha/2))^{-1})$. — (2) Ist \mathfrak{C} eine rektifizierbare Jordankurve, so gehört zu jedem α mit $0 < \alpha < \pi$ ein Teilbogen \mathfrak{B} von \mathfrak{C} mit $D(\mathfrak{B}) > \alpha$ und einer Länge nicht größer als $4B(\mathfrak{C})(\cos(\alpha/2))^{-2}$. — (3) Es seien \mathfrak{C}_n rektifizierbare Jordankurven, $n = 1, 2, \dots$ (a) Konvergiert $B(\mathfrak{C}_n)$ gegen Null, so existiert auf \mathfrak{C}_n ein Teilbogen \mathfrak{B}_n , dessen Länge gegen Null und dessen Deviation gegen π geht; (b) Ist $\lim \alpha_n = 0$, ist ferner die Deviation eines jeden Teilbogens \mathfrak{B}_n der Länge d nicht größer als α_n , so gilt $\lim B(\mathfrak{C}_n) = +\infty$. — (4) Es ist $0 < g(\alpha) \leq \text{ctg } 2^{-1}\alpha$ für $0 < \alpha < \pi$ und $g(\alpha) \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow 0$. *Otto Haupt*.

Aleksandrov, A. D.: Quasigeodätische. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 717—720 (1949) [Russisch].

In dem Buche des Verf. (Innere Geometrie konvexer Flächen, Moskau 1947; dies. Zbl. **38**, 352) findet sich eine Erklärung des Begriffs quasigeodätisch für die dort behandelten konvexen Flächen. Die vorliegende Note dehnt diesen Begriff auf beliebige Flächen beschränkter Krümmung aus, wie sie zuvor vom Verf. erklärt wurden (dies. Zbl. **36**, 233). Wie dort muß man die rechte und linke Abweichung τ_r und τ_l eines Bogens unterscheiden und daraus den Ausdruck $\varphi = \frac{1}{2}(|\tau_r| + |\tau_l| - |\tau_r + \tau_l|)$ bilden. Die „eigentliche Abweichung“ oder „Schlängelung“ eines Bogens L wird dann als oberer Limes σ der Summen aller zu beliebigen Unterteilungen gehörigen φ definiert. Kurven mit $\sigma = 0$ heißen quasigeodätisch. Hierfür läßt sich noch eine weitere Formulierung geben. Dazu sind zuerst $\tau_r^+(L) = \limsup |\tau_r(E)|$ und $\tau_r^-(L) = \liminf |\tau_r(E)|$ (für alle Borelschen Teilmengen E aus L) und ebenso τ_l^+ , τ_l^- sowie ω^+ und ω^- einzuführen ($\omega = \tau_r + \tau_l$). Dann ist ein quasigeodätisches L auch durch $\omega^+ = \tau_r^+ + \tau_l^+$ oder $\omega^- = \tau_r^- + \tau_l^-$ definiert. Ist L in der Metrik ϱ quasigeodätisch, so gibt es eine Folge von Kurven L^n , die gegen L konvergieren, und eine Folge von Metriken ϱ_n die in einem noch genauer präzisierten Sinne gegen ϱ konvergieren, derart daß die L^n bezüglich ϱ^n geodätisch sind. Kurz: die Quasigeodätischen sind Grenzen von Geodätischen und umgekehrt. Schließlich geht durch jeden Punkt A der Fläche in vorgegebener Richtung mindestens eine Quasigeodätische, was für Geodätische bekanntlich nicht richtig zu sein braucht, wenn A kein regulärer Punkt ist.

Werner Burau.

Aleksandrov, A. D.: Quasigeodätische auf Mannigfaltigkeiten, die der Sphäre homöomorph sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 557—560 (1950) [Russisch].

In vorliegender Note wird der bekannte Satz von Lusternik (Ljusternik) und Schnirelman (Šnirelman) über die Existenz von drei geschlossenen, geodätischen Linien auf einer konvexen Fläche auf Flächen beschränkter Krümmung (in dem vom Verf. eingeführten Sinne) vom Zusammenhang der Kugel ausgedehnt: Auf einer solchen Fläche F gibt es mindestens 3 geschlossene, sich nicht überschneidende, Quasigeodätische. Dabei sind Selbstberührungen dieser zugelassen, ein weiterer Satz sagt sogar aus: Durch 2 beliebige Punkte von F gibt es unendlich viele Quasigeodätische, und durch einen Punkt mit Richtung unendlich viele quasigeodätische Schleifen. Der Beweis dieser Sätze beruht auf der Tatsache, daß man eine beliebige Metrik ϱ durch Riemannsche Metriken ϱ_n approximieren kann. Diese Tatsache wird als erster Hilfssatz formuliert. Der zweite besagt, daß die quasigeodätischen Linien bzgl. ϱ_n von den Längen L_n in der Grenze in quasigeodätische bez. ϱ von der Länge $L = \lim L_n$ konvergieren. Im Rahmen dieser Note werden jedoch diese Hilfssätze nicht bewiesen.

Werner Burau.

Yamabe, Hidehiko and Zuiman Yujobo: On the continuous function defined on a sphere. Osaka math. J. **2**, 19—22 (1950).

Es bezeichne S^n die n -dimensionale Sphäre; für Punkte $P, Q \in S^n$ bedeute $\Delta(P, Q)$ die sphärische Distanz. Verff. beweisen: Ist $f(P)$ eine stetige Funktion auf S^n , so gibt es $n + 1$ Punkte P_0, P_1, \dots, P_n , so daß $\Delta(P_i, P_k) = \pi/2$ ($i \neq k$, $i, k = 0, 1, \dots, n$) und $f(P_0) = f(P_1) = \dots = f(P_n)$ ausfällt. Für $n = 2$ wurde dieses Theorem von S. Kakutani [Ann. Math., Princeton, II. S. **43**, 793—741 (1942)] bewiesen. Durch A. de Mira Fernandes [Portugaliae Math. **4**, 69—72 (1943); dies. Zbl. **28**, 319] wurde die Verallgemeinerung gefunden, die darin besteht, daß die Orthogonaldistanz $\pi/2$ durch eine beliebige sphärische Distanz Δ , $0 < \Delta \leq 2\pi/3$, ersetzt wird. [Das durch die Verff. bewiesene Theorem im Falle $n \geq 2$ ist möglicherweise analoger Erweiterung fähig; vgl. hierzu Bemerkungen von H. Hopf, Elemente Math., Basel **2**, 119—120 (1947)]. — Als hübsche Anwendung des Satzes ergibt sich, daß sich einem $(n + 1)$ -dimensionalen konvexen Körper stets ein Würfel umschreiben läßt. Diesen Schluß zog für $n = 2$ auch Kakutani; diese Tatsache wurde schon früher durch Hayashi u. a. festgestellt.

H. Hadwiger.

Bang, Thøger: On covering by parallel-strips. Mat. Tidsskr. B, København **1950**, Festskr. t. J. Nielsen, 49—53 (1950).

In 1932 Tarski conjectured the following theorem: Let L be a plane convex domain of minimal-width l . If L is covered by p parallel-strips with the widths h_1, \dots, h_p , then $h_1 + \dots + h_p \geq l$. In spite of the simplicity of this statement and of the fact that it was well known, this hypothesis was not yet proved excepted in special cases. The author proves the conjecture of Tarski; his very ingenious device works in n -space too. Consider p arbitrary strips, without supposing that L is covered by them; put $d = l - (h_1 + \dots + h_p)$. Denote by ε a p -uple of signs $+$ or $-$, and by E the set of the 2^p p -uples ε . Let P_ε be the set (possibly void) made up of the points lying on the $+$ or $-$ side of the i -th strip if the i -th sign in ε is $+$ or $-$ respectively. Denote by u_j a vector in the plane, perpendicular to the edges of j -th strip, oriented as this strip is, and of length $|u_j| = h_j/2$; εu stands for $\pm u_1 \pm \dots \pm u_p$ the signs being given by ε . Now the subset of L not covered by the strips has a content \geq than that of the set

$$A = \bigcup_{\varepsilon} [(L - \varepsilon u) \cap (P_\varepsilon - \varepsilon u)] \supset \bigcup_{\varepsilon} \left\{ \left[\bigcap_{\varepsilon'} (L - \varepsilon' u) \right] \cap (P_\varepsilon - \varepsilon u) \right\} = B$$

where intersections and unions are taken over all $\varepsilon, \varepsilon'$ in E . Then

$$B = \left[\bigcap_{\varepsilon'} (L - \varepsilon' u) \right] \cap \left[\bigcup_{\varepsilon} (P_\varepsilon - \varepsilon u) \right] = C \cap D.$$

It is easy to show (by induction on p) that the convex set C has a minimal width $\geq d$; it is more difficult to prove that D is the whole plane. Thus $B = C$, and when $d > 0$, A is not void, i. e. there are points not covered by the strips.

Etienne Fáy.

Fáy, I. und L. Rédei: Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. Math. Ann., Berlin 122, 205—220 (1950).

Let K be a convex body in the n -dimensional euclidean space. The authors consider the convex bodies K_* (K^*) with a center of symmetry which are contained (which contain) K and are of maximal (minimal) volume. Any convex body has only one K_* (proof based on the Brunn-Minkowski theorem). If the surface of K is „regular“ (i. e. each point belongs to only one plane of support) there is also only one K^* ; otherwise several or infinite K^* are possible. The characterization of the convex bodies with only one K^* remains an open question. If $V(K)$ denotes the volume of K , the ratios $c_* = V(K_*)/V(K)$ and $c^* = V(K^*)/V(K)$ are evaluated for the n -dimensional simplex.

L. A. Santaló.

Pi Calleja, Pedro: Über die zu einer gegebenen Figur polare Figur bezüglich eines Kreises um den Schwerpunkt. Math. Notae, Rosario 9, 88—93 (1949) [Spanisch].

Let $h(\varphi)$ be the support function of a plane convex domain K with respect to the interior point O . The author proves with an example that the conditions

$\int_0^{2\pi} h^{-3} \cos \varphi d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi} h^{-3} \sin \varphi d\varphi = 0$ have not as consequence that O be the center of gravity of K , assertion which is however true if K is a triangle. Some remarks about polar reciprocal convex curves are also included.

L. A. Santaló.

Komatu, Yûsaku: Isoperimetric inequalities. J. math. Soc. Japan 2, 57—63 (1950).

Betrachten wir in der komplexen z -Ebene ein von einer Jordanschen Kurve vom Umfang L begrenztes Gebiet G vom Inhalt F und bilden das Äußere von G durch die Potenzreihe $w = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$ auf das Äußere eines Kreises vom Radius C ab. Es werden die Ungleichungen $F \leq \pi C^2$ und $L \geq 2\pi C$ bewiesen, aus denen sich die klassische isoperimetrische Ungleichung $L^2 \geq 4\pi F$ ergibt. Es werden ferner bekannte Ungleichungen zwischen Flächeninhalt, Durchmesser und Dicke eines konvexen Gebiets mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln hergeleitet.

L. Fejes Tóth.

Hadwiger, H.: Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes für konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie. Mh. Math., Wien 54, 345—353 (1950).

Let K be a convex body in the three dimensional euclidean space E_3 . Let $C(K)$, $M(K)$, $F(K)$, $V(K)$ be respectively its total curvature ($= 4\pi$), integrated mean curvature, area and volume. The author has elsewhere proved the following interesting theorem: Any continuous, additive and motion invariant functional $\varphi(K)$ has the form $\varphi(K) = \alpha C(K) + \beta M(K) + \gamma F(K) + \delta V(K)$, where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are coefficients depending only upon φ . [A functional $\varphi(K)$ is said to be „additive“ if between the convex bodies K_1, K_2 in which K is divided by a plane and the intersection convex domain K_{12} the relation $\varphi(K_1) + \varphi(K_2) = \varphi(K) + \varphi(K_{12})$ holds.] In the present paper the author makes applications of this theorem to the obtention of many integral formulas (in part known, in part new) of the kind usual in integral geometry. The coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are determined by considering a particular case (in general that in which K is a sphere). For instance if K_0 is fixed and K^ω derives from K by spacial rotation ω about a fixed point, calling $d\omega$ the spherical cinematic density and denoting by $K_0 + K^\omega$ the sum of K_0 and K^ω in the sense of Minkowski, the following integral formulas hold: $\int C(K_0 + K^\omega) d\omega = 2\pi C_0 C$, $\int M(K_0 + K^\omega) d\omega = 2\pi(C_0 M + M_0 C)$, $\int F(K_0 + K^\omega) d\omega = 2\pi(C_0 F + 2M_0 M + F_0 C)$, $\int V(K_0 + K^\omega) d\omega = 2\pi(C_0 V + M_0 F + F_0 M + V_0 C)$. Several other formulas are also obtained.

L. A. Santaló.

Hammersley, J. M.: The distribution of distance in a hypersphere. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **21**, 447—452 (1950).

Es sei $\lambda = r/2R$ mit der Entfernung r zweier voneinander unabhängig aufs Geratewohl herausgegriffener Punkte der n -dimensionalen Vollkugel vom Halbmesser R . Für ihre Verteilung findet Verf. die Dichte $2^n n \lambda^{n-1} I_{1-\lambda^2}(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2})$ mit dem unvollständigen Betafunktionen-Quotienten

$$I_x(p, q) = \frac{\int_0^x z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz}{\int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz},$$

insbesondere bei $n = 1, 2$ und 3 die Dichtefunktionen

$$2(1-\lambda), \quad 16\lambda \{\arccos \lambda - \lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\}/\pi \quad \text{und} \quad 12\lambda^2(1-\lambda)^2(2+\lambda).$$

Dieses Ergebnis ist gedrängter als das 1926 von Deltheil in seinem Buche: *Probabilités géométriques* für r gegebene. Hierüber zeigt Verf. auch, daß $(\lambda - 1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{8n})$ asymptotisch normal verteilt ist. In ziemlich überraschender Weise findet man somit bei großem n für r fast sicher die Entfernung der Endpunkte zweier aufeinander senkrechter Halbmesser.

Tibor Szentmártony.

Topologie:

Müller, Gert H.: Über die Eigenschaften der Teilmengen eines Kuratowskischen Raumes. I. *Portugaliae Math.* **9**, 149—167 (1950).

Let R be an abstract space and the operations of closure and complementation defined according to Kuratowski. These operations made in succession and any number of times define functions whose domain is the set of all the subsets of R . Between any two such functions there are relations of inclusion and of empty, or not empty, intersection. — The purpose of the author in this paper is to investigate all the properties of an abstract space which may be defined in terms of relations of position between two functions of one subset. The main result is that the number of such properties is finite and that these properties are connected by certain relations. — The enumeration of the different cases which may occur is a long one and one which involves the use of very many symbols. An idea of the complicated results arrived at is made easier to acquire by some tableaux and graphs. — The most striking result of the author is perhaps his theorem 1 in which he gives, by means of the symbols defined before a criterion of connectedness. He states and proves two more theorems about connectedness of an abstract space being a consequence of some of the properties investigated previously. But they are of an extreme complication and are therefore not likely to lead to important developments of the theory of connectedness.

Father C. Racine.

Estill, Mary Ellen: Concerning abstract spaces. *Duke math. J.* **17**, 317—327 (1950).

Moore has shown [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **28**, 56—58 (1942)] that if his axioms 0 and 1 (see Moore, *Foundations of point set theory*, New York 1932; this *Zbl.* **5**, 54) hold, and there do not exist uncountably many mutually exclusive domains then space is separable. The author replaces axiom 1 by several other ones, discusses their relations, and constructs non-separable spaces satisfying these axioms.

Etienne Fáry.

Nagata, Jun-iti: On topological completeness. *J. math. Soc. Japan* **2**, 44—47 (1950).

The author gives a new proof and a slight generalization of the following theorem of Čech [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. **38**, 823—844 (1937); this *Zbl.* **17**, 428]: A metrizable space is topologically complete if and only if it is completely metrizable.

Etienne Fáry.

Cohen, L. W. and Casper Goffman: On completeness and category in uniform space. *Amer. J. Math.* **72**, 752—756 (1950).

There are two notions of completeness for ordered abelian groups. Such a group, G , is said to be t -complete if every fundamental sequence converges to a limit in G . It is said to be a -complete if it has no proper archimedean extension. — The relations between these notions of completeness and the property for G to be of the first, or of the second ξ^* -category (ξ^* being the ordinal number of G) lead to very difficult problems. The authors have shown (see this *Zbl.* **37**, 13) that if G is a -complete, it is also t -complete and of the second ξ^* -category. It is not yet known whether t -completeness is compatible with being of the first ξ^* -category. — In the present paper the authors make another contribution to the study of the problems just outlined. They study a class of uniform spaces metrizable with distances in an ordered abelian group. Their main result is that if such spaces are a -complete, and therefore t -complete, they are of the second ξ^* -category.

Father C. Racine.

Kuratowski, Casimir: Remark on an invariance theorem. *Fundamenta Math.* **37**, 251—252 (1950).

Let X be a separable metric space. Consider the statements: 1. For any closed set $F \subset X$ the number of components of $X - F$ is a topological invariant of F ; 2. the same statement as 1. without supposing F closed in X . The author shows that for locally connected, compact spaces X , 2. is a consequence of 1.; his proof is set theoretical (s. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1950, p. 174). For $X = S^n$ ($n \geq 1$) 1. holds true: cf. Alexander duality theory and Borsuk [*Fundamenta Math.* **37**, 217—241 (1950)].

Etienne Fény.

Borsuk, Karol: On an irreducible 2-dimensional absolute retract. *Fundamenta Math.*, Warszawa **37**, 137—160 (1950).

À la suite de ce travail, la théorie des rétractes, créée par L.A. il y a une vingtaine d'années, se trouve enrichie par la construction d'un continu P_∞ , de beaucoup plus frappant que le rétracte absolu indécomposable, obtenu en 1934 par le présent auteur et S. Mazurkiewicz (*C. R. Acad. Sci.*, Paris **199**, 110—112; ce *Zbl.* **9**, 232). P_∞ est une surface cantorienne de dimension 2, située dans l'espace euclidien à 3 dimensions E_3 ; de plus P_∞ est un rétracte absolu, ne contenant aucun vrai sous-ensemble fermé de dimension 2, à premier nombre de Betti fini. Les seuls vrais sous-ensembles de P_∞ , étant des rétractes absolus sont des dendrites: d'où le nom donné à P_∞ dans le titre. En même temps, P_∞ fournit un exemple de continu de dimension 2, localement contractible, ne possédant aucun vrai sous-ensemble fermé à 2 dimensions et localement contractible. — Il existe dans E_3 un homéomorphe R d'un disque fermé, dont l'intersection avec P_∞ est une courbe simple fermée, et dont la réunion avec P_∞ est une coupure irréductible de E_3 en deux régions. L'espace quotient E_3^* , obtenu de E_3 par identification des points de R , est homéomorphe à E_3 ; l'image de P_∞ dans E_3^* , est une surface cantorienne fermée, coupant E_3^* en deux régions, dont elle est la frontière commune; cette image constitue un exemple de rétracte de voisinage absolu, de dimension 2, ne contenant aucun rétracte absolu de dimension 2.

Tudor Ganea.

Bing, R. H. and E. E. Floyd: Coverings with connected intersections. *Trans. Amer. math. Soc.* **69**, 387—391 (1950).

The authors establish the following results. Let X be a compact, locally connected, separable metric space. X has a countable basis G of open sets, such that 1. the non-void finite intersections of elements of G are connected and uniformly locally connected; 2. if G' is a subcollection of G , then the intersection of the closures of elements of G' is the closure of the intersection of the elements of G' . An immediate consequence of this theorem is the following result of Andersen (this

Zbl. 35, 109): X is the union of finite $(1/i)$ -collections G_i ($i = 1, 2, \dots$) of continuous curves such that each subintersection of $\bigcup G_i$ is a continuous curve.

Etienne F\'ary.

Bing, R. H.: Complementary domains of continuous curves. *Fundam. Math.*, Warszawa 36, 303—318 (1949).

Generalizing well known properties of the complementary of plane continuous curves, the author proves the following theorems: If p, q and r are three points of the compact locally connected continuum M which is not separated by any pair of its points, then there is an arc from p to q in M such that the complement of this arc is connected, has property S and contains r . If M is separated by a pair of points, there is an arc from p to q such that each complementary domain of this arc has property S and each such pair of complementary domains is separated in M by a pair of points. Furthermore, for $\varepsilon > 0$ there are only a finite number of these complementary domains of diameter more than ε . If $W \subset M$ is totally disconnected, there is an acyclic continuous curve $T \subset M$ containing W such that each component of $M - T$ has property S and for each number $\varepsilon > 0$ there are no more than a finite number of such components of diameter more than ε . The author gives further the following characterization of simple surface: If M is a compact locally connected nondegenerate continuum which is not separated by any pair of its points, then either M is a simple surface or there is a simple closed curve J in M such that $M - J$ is connected and has property S . The proofs are based on lemmas concerning partitioning (introduced by the author and Moise). In the proof of the last theorem Zippin's results are applied.

Etienne F\'ary.

● **Brändli, Emil Rudolf:** Beiträge zur Theorie des Cohomologieringes. (Diss.) Kilchberg (Schweiz): Schmidberger & Müller 1948. 75 S.

Cette Thèse comporte trois parties: 1^o. Construction d'un polyèdre de dimension 2 admettant un anneau de cohomologie rationnelle donné „a priori”: le procédé indiqué — qui repose sur l'emploi d'une forme canonique de l'anneau, et d'identifications effectuées sur des surfaces — pourrait être considérablement simplifié. 2^o. Soit K un polyèdre fini plongé dans R^n ; on sait que la structure additive de la cohomologie du complémentaire $R^n - K$ est entièrement déterminée par l'homologie de K ; la structure multiplicative permet parfois de distinguer des immersions différentes de K : l'A. donne de nombreux exemples de ce cas: Cercles dans R^2 , surfaces et cercles dans R^3 , sphère et tore dans R^4 etc. Si le polyèdre K se compose de deux composantes connexes X et Y , la structure multiplicative de $R^n - K$ est déterminée par les structures additives de X et Y et par la donnée des cycles d'enlacement $S(x, y)$ de deux classes $x \in H_p(X)$, $y \in H_q(Y)$: un tel cycle $z = S(x, y)$ donne une classe de $H_{n+1-p-q}(Y)$; remarquer que z dépend de l'ordre des facteurs x et y . L'A. illustre ces notions d'exemples variés et intéressants. — 3^o. Soit K un complexe simplicial; on sait que le cup-product d'Alexander-Whitney peut être défini grâce à l'homomorphisme d^* induit par l'application diagonale de K dans $K \times K$; mais cette définition ne peut être valable à l'étage des cochaines, parce que la diagonale n'est pas un sous-complexe de la subdivision cellulaire canonique de $K \times K$; pour la rendre valable, on fait appel à la chaîne-transformation

$$d: (x_1 x_2 \cdots x_q) = \sum_i (x_1 x_2 \cdots x_i) (x'_i x'_{i+1} \cdots x'_q),$$

dont on montre ensuite qu'elle est homologiquement équivalente à l'application diagonale dans une subdivision simpliciale convenable du produit. *René Thom.*

Whitehead, J. H. C.: On simply connected, 4-dimensional polyhedra. *Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12* (Topologie algébrique, Paris 26. 6.—2. 7.1947), 103—106 (1949).

L'A. annonce ici un résultat qu'il démontrera plus tard (ce Zbl. 36, 127): le type d'homotopie d'un polyèdre K de dimension 4 simplement connexe est complète-

ment déterminé par la donnée de ses anneaux de cohomologie (mod m), reliés entre eux par les homomorphismes de Bockstein, et par l'homomorphisme p :

$$H^2(K, r) \rightarrow H^4(K, 2r)$$

défini par le carré de Pontrjagin; une telle structure algébrique peut toujours être réalisée géométriquement par un polyèdre d'un type spécial (polyèdre réduit).

René Thom.

Hilton, P. J.: Calculation of the homotopy groups of A_n^2 -polyhedra. I. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) **1**, 299—309 (1950).

Un A_n^2 -polyèdre est un polyèdre de dimension $n + 2$ au plus, asphérique pour les dimensions $\leq n - 1$. J. H. C. Whitehead [Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 176—186 (1949)] a montré que le type d'homotopie d'un A_n^2 -polyèdre est entièrement déterminé par la donnée des trois groupes d'homologie entière: H_n, H_{n+1}, H_{n+2} , les deux groupes d'homologie mod 2: $H_n(2), H_{n+2}(2)$, et un système d'homomorphismes qui les relient: l'homomorphisme de Bockstein (pour $p = 2$) $\Delta: H_{r+1}(2) \rightarrow H_r$ et un isomorphisme inverse Δ^* qui applique l'ensemble des éléments d'ordre pair ${}_2H_r$ dans $H_{r+1}(2)$, l'homomorphisme $\mu: H_r \rightarrow H_r(2)$ de réduction modulo 2, et l'homomorphisme $\gamma: H_{n+2}(2) \rightarrow H_n(2)$ dual de l'homomorphisme Sq^2 de Steenrod. Inversement, un tel système algébrique peut être réalisé par un polyèdre „réduit“, d'un type spécial. L'A. calcule alors sur ce polyèdre le groupe Π^{n+1} , en utilisant essentiellement un théorème de „suspension“ de J. H. C. Whitehead, qui décrit la variation des groupes d'homotopie d'un polyèdre lorsqu'on lui ajoute une cellule. On obtient: Π^{n+1} est une extension du groupe H_{n+1} par le groupe $H_n(2)/\gamma \mu H_{n+2}$; cette extension, non triviale en général sur la torsion d'ordre pair de H_{n+1} , est décrite explicitement; si $\gamma \Delta^* {}_2H_{n+1}$ est nul, l'extension est triviale. Le même résultat est formulé en termes duaux de la cohomologie.

René Thom.

● **Wilder, Raymond Louis:** Topology of manifolds. (American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 32.) New York: American Mathematical Society 1949. IX, 404 p. \$ 7,00.

Es handelt sich nicht um Mannigfaltigkeiten im klassischen Sinne, sondern um deren weitgehende Verallgemeinerungen in Richtung auf topologische Räume, insofern, als die Forderung der lokalen Euklidizität bzw. der Triangulierbarkeit durch schwächere, aber topologisch leichter faßbare Bedingungen ersetzt wird, so daß damit die wesentlichen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten erfaßt werden und die klassischen Sätze, wie z. B. die Dualitätssätze, erhalten bleiben. Es werden insbesondere — in Fortführung des Schoenfliesschen Programmes — die Lagebeziehungen von k -dimensionalen in n -dimensionalen verallgemeinerten Mannigfaltigkeiten untersucht. Da es sich nicht um eine Theorie der Komplexe handelt, werden in den elementaren Teilen des Buches mengentopologische Methoden benutzt, während später bei der Betrachtung der n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten die Čechsche Homologietheorie in den Vordergrund tritt. Die Darstellung ist sehr sorgfältig, und das Verständnis wird durch zahlreiche Hinweise, Beispiele und historische Bemerkungen erleichtert. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Inhaltsübersicht: Kap. 1: Einführung der einfachsten topologischen Begriffe: topologischer Raum, stetige Abbildung, Zusammenhang. Topologische Charakterisierung des einfachen Bogens und der 1-Sphäre. Kap. 2: Lokal-zusammenhängende Räume. Es handelt sich hier nur um den 0-dimensionalen Zusammenhang. Mit Hilfe dieses Begriffes werden weitere topologische Charakterisierungen des einfachen Bogens und der 1-Sphäre gegeben. Phragmén-Brouwersche Eigenschaften in lokal-zusammenhängenden Räumen. Kombinatorische Topologie der n -Sphäre. Kap. 3: Peanosche Räume; Charakterisierungen der 2-Sphäre und der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Kap. 4: Nichtmetrische lokal-zusammenhängende Räume mit Anwendungen auf Teilmengen der 2-Sphäre. Kap. 5: Algebraische Topologie. Čechsche Homologietheorie. Homologiegruppen. Cohomologiegruppen. Produkte von Ketten. — Mit Hilfe der Homologietheorie des 5. Kapitels werden die in den ersten 4 Kapiteln eingeführten „nulldimensionalen“ topologischen Begriffe in den folgenden Kapiteln auf n Dimensionen verallgemeinert. Kap. 6: Lokaler Zusammenhang und Co-Zusammenhang in n Dimensionen. Kap. 7: Anwendung von Homologie- und Cohomologietheorie auf die Theorie der Kontinua. Kap. 8: Verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten. Poincaréscher und Alexanderscher Dualitätssatz. Kap. 9: Weitere Eigenschaften der n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten; reguläre Mannigfaltigkeiten und verallgemeinerte n -Zellen. Kap. 10: Teilmannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit; Zerlegung in Zellen. Kap. 11: Lokal-zusammenhängende Teilmengen

einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Kap. 12: Erreichbarkeit und ihre Anwendungen. Anhang: Einige ungelöste Probleme. Herbert Seifert.

White, Paul A.: On the union of two generalized manifolds. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 4, 231—243 (1950).

L'A. utilise, à côté des notions classiques de i -localement connexe (i -lc) et lc^n (i -lc pour $0 \leq i \leq n$), les notions de i -colocalement connexe (i -colc) et de lc_n (i -colc pour $0 \leq i \leq n$), obtenues en remplaçant, dans la définition de i -lc, les groupes d'homologies des voisinages par les groupes d'homologie de l'espace modulo le complémentaire du voisinage. Dans ces conditions, une variété généralisée est un espace de dimension n , lc^{n-1} , et lc_{n-1} et qui possède en chacun de ses points l'homologie locale de l'espace euclidien R^n ; définition analogue évidente pour les variétés à bord (supposer seulement l'homologie locale nulle pour la dimension n en tout point du bord). L'A. montre alors que l'espace obtenu en identifiant le long de leur bord commun deux variétés généralisées est encore une variété généralisée (orientable, si les composantes le sont). La démonstration utilise la technique de l'homologie de Čech. René Thom.

Serre, Jean-Pierre: Homologie singulière des espaces fibrés. I. La suite spectrale. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 1408—1410 (1950).

This note is the first of a series of three and sums up a few generalizations of the theory recently developed by J. Leray (this Zbl. 39, 191). It states in terms of homology propositions stated by J. Leray in terms of cohomology (called commonly by Leray, for simplicity's sake, homology!). It extends this theory to the case of singular homology. — The „Espaces fibrés“ which are studied are of a more general type than the classical fibre bundles or fibre spaces. The basis B is a space whose homotopy groups are not subject to so many restrictions and the fibres are generally not homeomorphic. But the groups of singular homology and of homotopy form local systems on B . — A first result is about an exact sequence of mappings of homotopy groups and the main result about a spectral sequence of homology groups obtained by a special filtration. — Two applications treated by J. Leray in the above mentioned article are studied at the end of this note under slightly different assumptions, the second one concerning the exact sequence of H. C. Wang.

Father C. Racine.

Ehresmann, Charles: Sur la théorie des espaces fibrés. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26.6.—2.7.1947), 3—15 (1949).

Ein gefasertes Raum E mit der Faser F , der Basis B und der Strukturgruppe G — G ist eine topologische Gruppe von topologischen Selbstabbildungen von F ; die Abbildung $(s, y) \rightarrow s y$ ist eine stetige Abbildung von $G \times F$ auf F — kann stets folgendermaßen konstruiert werden: B wird mit offenen Mengen U_i ($i \in I$: Indexmenge) überdeckt. Für jedes Paar i, j wird eine stetige Abbildung s^{ji} von $U_i \cap U_j$ in G ($x \in U_i \cap U_j, x \rightarrow s_x^{ji} \in G$) so gegeben, daß s_x^{ji} das Einselement von G ist und daß für alle i, j, k und jedes $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt: $s_x^{ki} = s_x^{kj} s_x^{ji}$. Der gefaserte Raum E entsteht dann aus dem Summenraum $S = \sum U_i \times F$ ($i \in I$, je zwei Summanden sind als punktfremd aufzufassen) durch Identifizierung von (x, y) und $(x, s_x^{ji} y)$, falls $(x, y) \in U_i \times F$ und $(x, s_x^{ji} y) \in U_j \times F$. Die offenen Mengen $U_i \times F$ von $B \times F$ werden zulässige lokale Karten von E in bezug auf $B \times F$ genannt. Eine homöomorphe Abbildung k einer beliebigen offenen Menge $U \times F$ von $B \times F$ in E definiert ebenfalls eine zulässige lokale Karte, wenn k in bezug auf eine der überdeckenden lokalen Karten von der Form $(x, y) \rightarrow (x, s_x y)$ ist, wo $s_x \in G$. Eine homöomorphe Abbildung h von F in E heiße G -Abbildung, wenn F durch h auf eine Faser von E abgebildet wird und wenn diese Abbildung in bezug auf eine lokale Karte durch ein Element von G gegeben wird. Die Eigenschaft „ G -Abbildung“ hängt nicht von der Auswahl der lokalen Karte ab. H sei der topologische Raum aller G -Abbildungen. Die auf E definierte Struktur eines gefaserten Raumes wird zusammenfassend durch das Symbol $E(B, F, G, H)$ gekennzeichnet. H ist ebenfalls ein gefasertes Raum; eine Faser von H wird durch die G -Abbildungen von F auf eine feste Faser von E gegeben. H kann unter Verwendung der obigen Konstruktion von E so konstruiert werden: In dem Summenraum $S' = \sum_{i \in I} U_i \times G$ werden (x, t) und $(x, s_x^{ji} t)$ identifiziert, falls $(x, t) \in U_i \times G$

und $(x, s_x^{ji} t) \in U_j \times G$. Die Struktur $E(B, F, G', H')$ heißt untergeordnet (subordonnée) zur Struktur $E(B, F, G, H)$, wenn G' eine Untergruppe (und Unterraum) von G und H' ein Unterraum von H ist. Eine solche untergeordnete Struktur existiert, wenn es möglich ist, $E(B, F, G, H)$ mit Hilfe von zulässigen lokalen Karten so zu konstruieren, daß s_x^{ji} stets zu G' gehört. Identifiziert man in H zwei G -Abbildungen h_1, h_2 von F in E , wenn sie zur selben Faser von H gehören und $h_2^{-1} h_1 \in G'$, dann erhält man einen gefaserten Raum $H/(G')$ mit der Struktur $H/(G') (B, K, G_K, H_K)$, wo K der homogene Raum G/G' der Klassen sG' ($s \in G$) und G_K die Gruppe der durch G erzeugten Transformationen von K ist. Unter einer Bedingung, die verlangt, daß G in natürlicher Weise als gefasertes Raum $G/G' = K$ mit der Strukturgruppe G' aufgefaßt werden kann, und die jedenfalls erfüllt ist, wenn G eine Liesche Gruppe und G' eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, gilt: Die Existenz einer untergeordneten Struktur $E(B, F, G', H')$ ist äquivalent mit der Existenz einer Schnittfläche in $H/(G') (B, K, G_K, H_K)$. — Dieser Satz über die untergeordneten Strukturen wird vom Verf. u. a. dazu benutzt, um die fastkomplexen Strukturen einer orientierbaren, differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^{2n} zu untersuchen. Die Existenz einer fastkomplexen Struktur ist eine notwendige Bedingung dafür, daß V^{2n} als komplexe Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann, deren komplexe Koordinatensysteme zulässig sind im Sinne der gegebenen differenzierbaren Struktur. Die Frage nach solchen notwendigen Bedingungen war der Anlaß zu der vorliegenden Arbeit. — Der Raum E der Tangentialvektoren von V^{2n} hat die Struktur $E(V^{2n}, R^{2n}, L, H)$, wo L die lineare homogene Gruppe des R^{2n} ist. L' sei die komplexe lineare Gruppe des R^{2n} ($R^{2n} = C_n$). $K = L/L'$ läßt sich als Raum der komplexen Strukturen des R^{2n} auffassen; eine „komplexe Struktur“ des Vektorraumes R^{2n} wird durch eine lineare Transformation \mathfrak{S} mit $\mathfrak{S}\mathfrak{S} = -\mathfrak{E}$ bestimmt. Die Frage nach einer untergeordneten Struktur $E(V^{2n}, C_n, L', H')$ ist gleichwertig mit der Frage nach einer Schnittfläche in $H/(L') (V^{2n}, K, L_K, H_K)$. Eine solche Schnittfläche definiert eine fastkomplexe Struktur. Der Raum der Tangentialvektoren von V^{2n} läßt stets eine Struktur $E(V^{2n}, R^{2n}, \Omega, H_1)$ zu, wo Ω die orthogonale unimodulare Gruppe ist. Eine fastkomplexe Struktur von V^{2n} wird dann gegeben durch eine hierzu untergeordnete Struktur $E(V^{2n}, C_n, \Omega', H')$, wo Ω' die komplexe unitäre Gruppe ist, aufgefaßt als Untergruppe von Ω . Eine fastkomplexe Struktur wird also bestimmt durch eine Schnittfläche in einem gefaserten Raum E' mit der Basis V^{2n} und der Faser $\Gamma_n = \Omega/\Omega'$. Folgerung: V^{2n} besitzt eine fastkomplexe Struktur genau dann, wenn es in V^{2n} eine äußere Differentialform zweiten Grades gibt, die überall den Rang $2n$ hat. Für V^{2n} ist in bezug auf die Faserung $E'/\Gamma_n = V^{2n}$ eine 3-dimensionale charakteristische Klasse (3-dim. Hindernis) W_3 gegeben. $W_3 = 0$ ist notwendig für die Existenz einer fastkomplexen Struktur; für eine orientierbare V^6 ist $W_3 = 0$ auch hinreichend. Insbesondere besitzt die Sphäre S^6 eine fastkomplexe Struktur. Für $V^{2n} = S^4$ ist $W_3 = 0$; das nächste Hindernis W_4 für die Faserung $E'/\Gamma_2 = S^4$ läßt sich direkt berechnen: $W_4 \neq 0$. Folgerung: S^4 besitzt keine fastkomplexe Struktur, ist also erst recht keine komplexe Mannigfaltigkeit. Der letzte Satz über die S^4 wurde auch von H. Hopf bewiesen. Für die Frage, ob die Sphären S^{2n} komplexe Mannigfaltigkeiten sind, vergleiche man H. Hopf, Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12, 55–59 (1949) und dies. Zbl. 33, 25; A. Kirchhoff, dies. Zbl. 30, 273.

Fritz Hirzebruch.

Hirsch, Guy: La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26.6.—2.7.1947), 35–42 (1949).

Die einzigen (Schief)-Körper endlichen Ranges über dem Körper der reellen Zahlen sind nach Frobenius die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen und die Quaternionen. Zu jedem dieser drei Körper gehört eine projektive Gerade und eine projektive Ebene. Topologisch gesehen sind diese drei klassischen Geraden die Sphären S^1, S^2, S^4 ; die drei klassischen Ebenen sind geschlossene Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 2, 4, 8. — Verf. definiert: Die geschlossene Mannigfaltigkeit V^{2n} ist eine projektive (Γ) -Ebene, wenn in V^{2n} eine Familie von eingebetteten Mannigfaltigkeiten, die projektive Geraden genannt werden, so ausgezeichnet ist, daß gilt: Durch 2 Punkte von V^{2n} geht genau eine projektive Gerade, 2 Geraden schneiden sich in genau einem Punkt, und die Verbindungsgerade bzw. der Schnittpunkt hängen stetig von den 2 Punkten bzw. 2 Geraden ab. An die Geraden soll ferner eine Regularitätsbedingung gestellt sein. — Die geschlossene Mannigfaltigkeit $V^{n+n'}$ hat die Eigenschaft (II), wenn in $V^{n+n'}$ eine Sphäre S^n so eingebettet ist, daß $V^{n+n'} - S^n$ dem euklidischen Raum $E^{n+n'}$ homöomorph ist. Anders ausgedrückt: $V^{n+n'}$ ist eine solche Abschließung des $E^{n+n'}$, daß die „unendlich-fernen“ Punkte eine S^n bilden. Die klassischen projektiven Ebenen haben die Eigenschaften (I)

und (II) mit $n = n' = 1, 2, 4$. Sie geben ferner Anlaß zu den bekannten Sphärenfaserungen $S^1/S^0 = S^1$, $S^3/S^1 = S^2$ und $S^7/S^3 = S^4$. (H. Hopf, dies. Zbl. 12, 319.) Diese Faserungen sind äquatorial, d. h. die Fasern sind Großsphären S^{n-1} der Einheitssphäre S^{2n-1} im E^{2n} . (Φ_n) bedeute: Es gibt eine äquatoriale Faserung S^{2n-1}/S^{n-1} . Der Basisraum einer solchen Faserung ist stets die S^n . Aus (I) folgt: Für die Randsphäre S^{2n-1} einer geeigneten Umgebung eines Punktes von V^{2n} gibt es eine äquatoriale Faserung S^{2n-1}/S^{n-1} . Der Basisraum ist eine projektive Gerade. Die Geraden einer (I)-Ebene V^{2n} sind also stets Sphären S^n . Die Eigenschaft (Φ_n) ist erfüllt. — Aus (II) folgt: Ein geeigneter Umgebungsrand $S^{n+n'-1}$ von S^n in $V^{n+n'}$ ist äquatorial gefasert: $S^{n+n'-1}/S^{n'-1} = S^n$, es ist $n = n'$, (Φ_n) ist erfüllt. — Umgekehrt kann man, wenn (Φ_n) erfüllt ist, eine Mannigfaltigkeit V^{2n} mit den Eigenschaften (I) und (II) konstruieren. Wenn (Φ_n) erfüllt ist, dann ist der reelle projektive Raum P^{n-1} parallelisierbar. Es ist dann n eine Potenz von 2. (Hopf, Stiefel, dies. Zbl. 24, 360.) (Φ_8) gilt (Hopf, loc. cit.): Es gibt die äquatoriale Faserung $S^{15}/S^7 = S^8$, die mit Hilfe der Cayleyschen Zahlen konstruiert wird, und eine entsprechende (I)-Ebene V^{16} . Eine (I)-Ebene V^{2n} ($n = 2^k$) ist für $k > 2$ nicht-desarguensch. Ungeklärte Frage: Für welche $k > 3$ gilt (Φ_{2^k}) ? Äquivalente Frage: Für welche $k > 3$ gibt es eine (I)-Ebene?

Fritz Hirzebruch.

Stiefel, E.: Sur les nombres de Betti des groupes de Lie clos. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26.6.—2.7.1947), 97—101 (1949).

L'A. décrit une tentative de détermination des nombres de Betti des groupes de Lie compacts. Cette méthode mène rapidement au but pour les groupes classiques mais, reposant sur l'existence de sous-groupes de rang $l - 1$ non homologues à zéro elle ne peut, contrairement à ce qu'espérait l'A., être appliquée aux groupes exceptionnels E_4, E_6, E_7, E_8 qui n'en contiennent pas, comme on l'a appris depuis (cf. Yen Chih Ta, ce Zbl. 34, 18).

Armand Borel.

Hu, Sze-Tsen: On singular homology in differentiable spaces. Ann. math., Princeton, II. S. 50, 266—269 (1949).

Nach S. Eilenberg (dies. Zbl. 29, 419) erhält man dieselben Homologie- und Kohomologiegruppen einer Mannigfaltigkeit der Klasse C^k , wenn man statt der singulären Simplexe der Klasse C^0 nur die der Klasse C^k zugrunde legt. Verf. gibt hierfür einen einfacheren Beweis, der sich nicht auf die Triangulierbarkeit der Mannigfaltigkeit stützt, sondern mit differenzierbaren Retraktionen operiert. Der Satz gilt daher für eine allgemeinere Klasse von differenzierbaren Räumen, die wie folgt definiert sind: Eine Teilmenge M des n -dimensionalen euklidischen Raumes E^n heißt ein differenzierbarer Raum der Klasse C^k , wenn es in E^n eine Umgebung $U(M)$ und eine differenzierbare Abbildung θ von U in M der Klasse C^k mit $\theta(x) = x$ für $x \in M$ gibt.

Willi Rinow.

Hopf, H.: Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26. 6.—2. 7. 1947), 55—59 (1949).

Dans une variété V de dimension 4 existent toujours des champs d'éléments de surface ne présentant que des singularités ponctuelles; en un tel point singulier, on définit un index de singularités comme élément de $\pi^3(U)$, U variété des grands cercles orientés de la sphère S^3 , homéomorphe à $S^2 \times S^2$. La somme des indices se trouve donc exprimée par un couple d'entiers (p, q) qui n'est un invariant topologique de V que si le 2° nombre de Betti $b_2(V)$ est nul. Les entiers p et q peuvent se calculer par le procédé suivant: si, dans un espace fibré par des sphères S^2 , on a deux sections F, F' sur le squelette K^3 , et si Γ et Γ' désignent les (seconds) obstacles correspondants, on a: $\Gamma' - \Gamma = \Delta(F', F) \cup \Delta(F', \bar{F})$, où $\Delta(F, F')$ désigne le cocycle-séparation des deux sections F, F' sur le squelette K^2 , et \bar{F} la section anti-

podique de F . L'A. indique les valeurs possibles de (p, q) pour nombre de variétés $(S^1 \times V^3, \text{plan projectif complexe etc.})$ et en déduit des conséquences relatives à la non-existence de structures complexes sur V . René Thom.

Rham, Georges de: Sur les conditions d'homéomorphie de deux rotations de la sphère à n dimensions, et sur les complexes avec automorphismes. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26. 6.—2. 7. 1947), 87—95 (1949).

Die Topologie der Drehungen endlicher Ordnung n -dimensionaler Sphären, welche im wesentlichen mit der Topologie der Linsenräume äquivalent ist, erfährt eine neue Darstellung, durch die sich der Beweis des Satzes von Rueff über den Grad einer Abbildung f einer Sphäre auf sich, für welche $fR = R'f$ gilt (R und R' seien Drehungen derselben Ordnung), bemerkenswert vereinfacht. Derselbe läßt sich mit Hilfe einer Beziehung zwischen den 0- und den n -dimensionalen Ketten der Sphärenunterteilungen mit Automorphismen erbringen, die durch die Berandungsoperation herstellbar ist. Ferner ergibt sich eine neue Definition der Torsion von Franz für die hier in Frage stehenden Komplexe unter Verwendung der harmonischen Ketten mit Automorphismen. Kurt Reidemeister.

Seifert, Herbert: Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations. Proc. Amer. math. Soc. 1, 287—302 (1950).

Preliminaries: E denotes the Euclidean plane. An isotopic deformation \mathfrak{D} of E is a set $\{A_\lambda\}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, of topological mappings of E onto itself such that A_0 is the identical mapping and $A_\lambda(P)$ depends continuously on λ and P . For every P in E , the curve $\mathfrak{T}(P)$: $X = A_\lambda(P)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ is called the trajectory of P . \mathfrak{D} is called bounded if the diameters of the trajectories are bounded. The indicatrix $\mathfrak{J}(P)$ is defined as the (closed) curve $X = A_\lambda A_1 A_\lambda^{-1}(P)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. P is termed exceptional if it lies on $\mathfrak{J}(P)$ or equivalently if it lies on the trajectory of a fixed point of A_1 . If P is not exceptional, the order $\omega(P)$ of P relative to $\mathfrak{J}(P)$ is called the rotation number of \mathfrak{D} at P . E being considered as the plane $z = 0$ of an orthogonal $x y z$ -coordinate system, the translation B_λ : $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + \lambda$ maps the plane E : $z = 0$ onto the plane E_λ : $z = \lambda$. For every P in E the curve $\mathfrak{S}(P)$: $X = B_\lambda A_\lambda(P)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ is called the streamline of P . $\mathfrak{T}(P)$ is the orthogonal projection of $\mathfrak{S}(P)$ into E . The main tools in this paper are the return mapping T and the return vector $\vec{QQ'}$ defined for Q in Z : $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 \leq z \leq 1$, as follows: R representing the point of intersection of the streamline through Q with E_1 , P' the orthogonal projection of R on E , $Q' = T(Q)$ is the point of intersection of $\mathfrak{S}(P')$ with E_λ . The fixed points of T are the points of the streamlines \mathfrak{F}_v (fixed lines) passing through the fixed points F_v of the mapping A_1 . Their orthogonal projections on E are the exceptional points. p denoting the segment $0 \leq z \leq 1$ through P in E parallel to the z -axis, $\mathfrak{J}(P) =$ orthogonal projection of $\mathfrak{T}(p)$ into E . If P is not exceptional, $\omega(P)$ is up to the factor 2π equal to the total change of the return vector when its initial point traverses the segment p . Theorem I: If U and V are not exceptional points and if the F_v have no limit point, then $\omega(V) - \omega(U) = \sum \gamma_v S(f_v, q)$, in which γ_v is the fixed point index of F_v under the mapping A_1 , $f_v = \mathfrak{T}(F_v)$, and $S(f_v, q)$ the intersection number of f_v and a curve q in E running from U to V . Theorem 2: If \mathfrak{D} is bounded and A_1 has at most isolated fixed points F_v , for a non exceptional point V , $\omega(V) = \sum \gamma_v \theta_v$, where θ_v is the order of V relative to f_v and γ_v is the fixed point index of F_v in the mapping A_1 . Theorem 3 expresses the special case of Theorem 1 when A_1 has no fixed points. The proof of Theorem 1 rests on the homology properties of $Z^* = Z - \bigcup \mathfrak{F}_v$ provided with the field of the non vanishing return vectors. In the proof of Theorem 2, \mathfrak{D} is extended to a deformation $\{A_\lambda\}$, whose parameter λ runs from 0 to 3. Theorems 1, 2, 3 are gene-

ralized into Theorems 1', 2', 3' for the case where the A_i are only defined in an open region G of E . Theorem 3' is used to prove the existence of a closed integral curve for a continuous vector field on the 3-sphere differing sufficiently little from a field of Clifford-parallels and sending through every point exactly one integral curve (Theorem 4).

Christian Pauc.

Duff, G. F. D.: Limit cycles of systems of the second order. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 749—752 (1950).

Soit $X(x, \alpha)$, ($x \in R^2$), un champ de vecteurs, dépendant du paramètre réel α , défini dans le plan euclidien R^2 . On suppose que: $X(x, \alpha + 2\pi) = X(x, \alpha) = -X(x, \alpha + \pi)$, $X(x, 0) = 0 \leftrightarrow X(x, \alpha) = 0$, $\theta(x, \alpha)$ est une fonction croissante de α [$\theta(x, \alpha)$ est l'angle polaire de $X(x, \alpha)$]. — Les trajectoires fermées de $X(x, \alpha_1)$ et $X(x, \alpha_2)$, où $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$, n'ont pas de points communs. Un point singulier simple de $X(x, \alpha)$ absorbe ou engendre exactement une trajectoire fermée lorsque α varie de 0 à π , etc. . . . L'A. montre comment les résultats précédents permettent de préciser l'étude de l'existence et de la localisation des trajectoires fermées de $X(x, 0)$.

Georges Reeb.

Radojčić, M.: Sur un problème topologique de la théorie des surfaces de Riemann. Publ. Inst. math., Acad. Serbe Sci. A **2**, 11—23 u. serb. Zusammenfassg. 24—25 (1948).

Ziemlich triviale Bemerkungen über topologische Abbildungen einfach zusammenhängender unberandeter Riemannscher Flächen auf schlichte Bereiche.

Walter Brödel.

Kuratowski, Casimir: On a topological problem connected with the Cantor-Bernstein theorem. Fundamenta Math., Warszawa **37**, 213—216 (1950).

Verf. definiert zwei ebene, kompakte, nicht homöomorphe Mengen A und B , deren jede mit einer relativ offenen Teilmenge der anderen homöomorph ist. A besitzt abzählbar viele Komponenten; von diesen ist jede entweder ein Baum, oder die Vereinigung eines Baumes mit einer Kreislinie, die mit dem betreffenden Baum einen einzigen Punkt gemeinsam hat. Durch Weglassen einer bestimmten Komponente aus A entsteht die in A offene Teilmenge B ; durch weiteres Weglassen einer bestimmten Komponente aus B entsteht eine in B offene Menge, welche, wie ersichtlich, mit A homöomorph wird. Bei dem weiteren Beweis des Nicht-homöomorph-Seins von A und B wird, unter anderen, der Begriff der Ordnung eines Punktes benützt. Da die Mengen A und B 1-dimensional sind, bleibt, wie Verf. bemerkt, ein von R. Sikorski aufgestelltes Problem [Colloq. Math. **1**, 242 (1948)] offen, nämlich, zwei 0-dimensionale Kompakta A und B zu finden, die sich wie oben erwähnt verhalten.

Tudor Ganea.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Milosavljevič, D.: Déviation vers l'est dans la chute libre d'un corps pesant. Vesnik Društva Mat. Fis. Srbije **1**, 60—69 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 69 (1949) [Serbisch].

Syrový, Antonín: Sur le mouvement asymptotique de la corde de Lagrange. Časopis Mat. Fys., Praha **74**, Nr. 4, 331—334 und französ. Zusammenfassg. 334 (1950) [Tschechisch].

In vorliegender Arbeit werden die Bewegungs- und Energieverhältnisse einer schwingenden Lagrange-Saite untersucht, d. h. einer masselosen Saite, die zwischen zwei festen Punkten eingespannt ist. Diese Saite trägt m Massepunkte von gleicher Masse μ und gleichen Abständen a voneinander. Die Saite besitzt eine bestimmte Spannung und kann um ihre Ruhelage Schwingungen ausführen. Diese werden durch elastische Stöße mit einer Kugel von der Masse μ_0 ($\mu_0 < \mu$) erzeugt, wobei die

Kugel vor jedem Stoß stets die gleiche Geschwindigkeit besitzt. Die Stöße wiederholen sich mit einer bestimmten Periode. — Unter diesen Voraussetzungen bestimmt Verf. den Ausschlag und die Energie der schwingenden Saite. Ausgehend von unendlich kleinen Schwingungen kommt er nach vorübergehender Einführung geeigneter Koordinaten zu dem Schluß, daß mit wachsender Anzahl von Stößen sich der Saitenausschlag asymptotisch einem Wert nähert, für den er eine Gleichung angibt. Bei einer sehr großen Anzahl von Stößen schwingt die Saite ständig nach einer Seite von der Ruhelage aus, wofür ebenfalls eine Gleichung angegeben wird. Desgleichen wird für diesen Fall ein Ausdruck für die Energie der s -ten Eigenschwingung angegeben.

Karl Karas.

Mihailovitch, D.: Les intégrales premières dans le problème d'entreehoc de trois corps. Vesnik Društva Mat. Fis. Srbije 1, 45—60 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 60—61 (1949) [Serbisch].

Mihailovitch, Dobrivoje: Réduction du système des équations différentielles du mouvement dans un cas spécial du problème des trois corps. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 2, Nr. 1/2, 81—97 und französ. Zusammenfassg. 97 (1950) [Serbisch].

L'A. expose le principe de Block sur la variation des constantes du problème de choc de trois corps, par la méthode d'analyse vectorielle. On considère les équations différentielles du problème

$$k^2 m_i \left\{ \tau^2 \frac{d^2 \vec{r}_i}{d\tau^2} + 2 \tau \frac{d\vec{r}_i}{d\tau} - 2 (\vec{a}_i + \vec{r}_i) \right\} = \text{grad}_{\vec{r}_i} V \quad (i = 1, 2, 3),$$

et on expose le caractère de déformation de constellation des solutions exactes, en les comparant avec les solutions à l'environ du centre de libration du problème restreint. Puis l'A. a démontré que les vecteurs \vec{r}_i et $\text{grad}_{\vec{r}_i} V$ sont liés par les relations

$$\sum_{i=1}^3 m_i (\vec{a}_i \times \vec{r}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 \vec{a}_i \times \text{grad}_{\vec{r}_i} V = 0.$$

La première de ces relations donne une liaison linéaire entre les coordonnées du vecteur \vec{r}_i . Par cette relation l'A. réduit le système de Block de quatre équations au système de trois. En même temps on donne la solution du problème en première approximation. (Autoreferat.)

Masket, A. Victor: The measurement of forces resisting armor penetration. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 132—140 (1949).

In vorliegender Arbeit werden die Geschößbewegungen während des Durchschlagens einer Panzerplatte behandelt sowie die dabei auftretenden Kräfte untersucht. Während man nach Angabe des Verf. noch während des zweiten Weltkrieges bei der Untersuchung dieses Problems fast ausschließlich auf empirische Formeln angewiesen war, gelingt es mit Hilfe des in dieser Arbeit beschriebenen Präzisionschronographen, die Lage, Geschwindigkeit und Verzögerung des Geschosses vor und während der Panzerplatten-Durchdringung anzugeben und die Kräfte zu bestimmen, die auf das nicht deformierbare Geschöß einwirken. Zu diesem Zweck wird eine Zeitlupen-Revolver-Kamera verwendet, welche die Schattenbahn des fliegenden Geschosses auf einem rasch ablaufenden Filmstreifen festhält. Zur Aufnahme des Durchdringungsvorganges, der nur etwa 10^{-4} sec. oder noch kürzer dauert, sind verschiedene Zusatzeinrichtungen notwendig, die vom Verf. im einzelnen beschrieben und in einigen Abbildungen gezeigt werden. In zwei weiteren Abb. stellt er die einzelnen Stadien der Annäherung an die Panzerplatte und das Durchdringen derselben in Schattenphotographie dar, wobei auch der Fall eines abprallenden Geschosses erfaßt wird. Weiter werden noch in einem Schaubild Durchdringungskurven für Geschosse gleicher Art bei Panzerplatten verschiedener Dicke gezeigt. — In einem weiteren Abschnitt werden die beim Durchdringen des Geschosses auftretenden Longitudinalschwingungen unter vereinfachenden Annahmen behandelt. Verf. kommt schließlich zu Gleichungen für den Weg, die Geschwindigkeit und die Verzögerung des Geschosses und findet aus den Verzögerungen eine Funktion für den Kraftverlauf. In einer Abbildung werden Verzögerungskurven gezeigt, während in einer weiteren Abbildung der Einfluß zweier Geschosse gleichen Kalibers aber verschiedener Form auf den Kraftverlauf bei der Durchdringung von zwei Panzerplatten aus verschiedenen Stahlorten dargestellt wird, wobei der grundsätzlich im allgemeinen gleichartige Kurvenverlauf durch darübergelagerte Wellen verhältnismäßig kleiner Amplitude modifiziert wird, die ihre Entstehung den Longitudinalschwingungen des Geschosses verdanken.

Karl Karas.

Banks, J. N.: An extended use of velocity-time graphs. Math. Gaz., London 33, 162—168 (1949).

Vorliegende Arbeit behandelt ein erweitertes Anwendungsgebiet der Darstellung von Bewegungsvorgängen in Geschwindigkeits-Zeit-Diagrammen. Mit ihm können schwierigere Bewegungsprobleme, wie z. B. die Berechnung von Geschosßbahnen und verwandte Aufgaben oder Stoßvorgänge einer einfachen Lösung zugeführt werden. Zu diesem Zwecke werden für die zu untersuchende Bewegung je nachdem, ob es sich um ein ebenes oder räumliches Problem handelt, entweder zwei oder drei Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme in zueinander senkrechten Ebenen (x , y , z -Richtung) entwickelt. Diese Diagramme, die sich aus Dreiecken, Rechtecken oder Trapezen zusammensetzen, liefern mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehungen untereinander die gesuchten Größen. Während bei Geschosßbahnen auf diese Art leicht die Schußweite, der Bahnerhöhungswinkel und dergleichen mehr bestimmt werden können, gestattet das Verfahren bei Stoßvorgängen die Darstellung des plötzlichen Geschwindigkeitswechsels oder die Bestimmung der Bewegungsumkehr. — Die Anwendung des Verfahrens wird an Hand von sechs Beispielen aus der Bewegungslehre gezeigt, von denen besonders das Beispiel 5 (dreifache Reflektion eines geworfenen Massenpunktes an drei vertikalen Wänden) und Beispiel 6 (Aufprall einer schweren Masse auf eine unelastische Platte und Wiederabheben derselben durch eine kleinere Masse, die mittels eines undehnbaren Fadens über eine Rolle angeschlossen ist) die rasche Bewältigung des vorliegenden Problems erweisen.

Karl Karas.

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Zerna, W.: Allgemeine Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Ingenieur-Arch. 18, 211—220 (1950).

Kurze, jedoch klare Zusammenstellung einiger Definitionen und Formeln der Tensorrechnung in Ricci-Schreibweise. Einführung des Spannungs- und gewöhnlichen Verzerrungstensors in allgemeinen Koordinaten; Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen. Für infinitesimale Verzerrungen wird der lineare Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor und das daraus folgende Differentialgleichungssystem für den Verschiebungsvektor in allgemeiner Form angegeben.

Hans Richter.

Aržanyeh, I. S.: Die Integralgleichungen des Deformationsvektors der Statik eines isotropen elastischen Körpers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 75, 783—786 (1950) [Russisch].

Es werden für den Deformationsvektor eines isotropen elastischen Körpers im Falle der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie mit Hilfe der Greenschen bzw. Neumannschen Funktion der Potentialgleichung lineare Integralgleichungen zweiter Art aufgestellt; die Integrale sind bei der ersten über den Körper, bei der zweiten über den Körper und die Berandung erstreckt. Für beide Aufgaben werden Näherungslösungen angegeben.

Karl Maruhn.

Sekiya, Tutosi and Atusi Saito: Some applications of Dirac's δ -function on the mathematical theory of elasticity. J. Osaka Inst. Sci. Technology 1, 99—110 (1949).

Die Dirac-Funktion $\delta(x)$ mit $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ mit

der Folgerung $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$, wobei das Integrationsintervall noch in ein beliebiges endliches, die Stelle $x = a$ enthaltendes Intervall abgeändert werden kann, und die 2- und 3-dimensionale Verallgemeinerung dieser Formel läßt sich formal in der Elastizitätstheorie verwenden zur Behandlung von Belastungen durch Einzelkräfte in den Fällen, wo Spannungen oder Durchbiegungen explicite als bestimmte Integrale erscheinen, die Belastungsfunktionen enthalten. Dies wird erläutert 1. am elastisch-gebetteten endlich langen Balken unter endlichvielen Einzel-

kräften bei Verwendung des Heaviside-Operators; 2. an der unendlichen Halbebene unter endlichvielen Einzelkräften am Rand bei Verwendung der Formeln von Kolossoff [Z. Math. Phys. **62**, 384—409 (1914)] für das ebene Problem; 3. an der eingespannten kreisförmigen Platte unter beliebiger konstanter Belastung und durch Belastung mit beliebig vielen Einzelkräften.

Ruth Moufang.

Bloch, V. I.: Die Spannungsfunktionen in der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **14**, 415—422 (1950) [Russisch].

Ist σ der Spannungstensor im elastischen Medium mit der Dichte ρ , I der Einheitstensor und mögen die Volumkräfte \mathfrak{B} ein Potential haben: $\rho \mathfrak{B} = \nabla F$, so ist die allgemeine Lösung für das Spannungsgleichgewicht (1): $\sigma + FI = -\nabla \times \varphi \times \nabla$ mit beliebigem symmetrischen Tensor φ zweiter Stufe. φ ist bestimmt bis auf einen Summanden $\varphi_0 = \nabla v + v \nabla$ mit beliebigem Vektorfeld v . Durch geeignetes v können drei der sechs Komponenten von φ zu Null gemacht werden: Es bleiben drei Spannungsfunktionen. In kartesischen Koordinaten gibt es hierfür fünf Möglichkeiten: σ ist Diagonalmatrix (Maxwell), $\sigma_{ii} = 0$ (Morera), $\sigma_{ik} = 0$ für $i = 1$ oder 2 oder 3; in Zylinderkoordinaten gibt es 10 solcher Möglichkeiten, in Polarkoordinaten dagegen nur eine. — Verträglichkeitsbedingung und Hookesches Gesetz führen zu (2):

$$\Delta \varphi - S I / (1 + \mu) + (1 - 2\mu) F I / (1 + \mu) = (\nabla w + w \nabla) / 2$$

mit $S = \Delta \varphi_I - \Delta^2 \cdot \varphi$ und (3): $\Delta S = 2(1 - 2\mu) \Delta F / (1 + \mu)$; dabei ist w ein Vektorfeld, μ die Poissonsche Konstante, φ_I die erste Invariante von φ . w ist eindeutig bestimmt bis auf ein $w^0 = a \times r + b$, a und b konstante Vektoren, $r =$ Ortsvektor. Mit $\Delta R = F$ wird dann

$$(4): \quad \varphi = (1 - 2\mu) R I / (1 + \mu) + (\nabla^2 \cdot B) I + (1 - \mu) \Delta B + (\nabla \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \nabla) / 2$$

mit biharmonischem symmetrischen Tensor B ; „ \cdot “ kennzeichnet doppelt-skalare Multiplikation. Mit $B = z \Phi + \Phi_0$, Φ und Φ_0 harmonisch, entsteht entsprechende Darstellung (4*) durch harmonische Tensoren. — (1) liefert aus (2), (4), (4*) Darstellungen für σ ; entsprechend gibt $E u / (1 + \mu) = 2 \nabla \cdot \varphi - \nabla \varphi_I - w$ angegebene Darstellungen für die Verschiebung u durch biharmonische oder harmonische Tensoren. — Die Gestalt der Randbedingungen bezgl. äußerer Kräfte und Momente bei Verwendung obiger Spannungsdarstellungen wird angegeben und diskutiert.

Hans Richter.

Takeuti, Yoitiro: On a method of solving the two-dimensional stress problems solved only by harmonic function. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 111—113 (1949).

Verf. benutzt die von G. Kolossoff [Z. Math. Phys. **62**, 384—409 (1914)] abgeleitete komplexe Darstellung der Grundgleichungen des ebenen Problems bei gegebenen Randkräften zur Lösung spezieller Aufgaben. Die drei Spannungskomponenten sind dabei ausgedrückt durch Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen, die auf dem Rand des Bereiches vorgeschriebene, durch die dort gegebenen Werte des Spannungstensors bestimmte Randwerte annehmen.

Ruth Moufang.

Minberg (Münzberg), B. L.: Gemischte Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie für eine Ebene mit kreisförmiger Öffnung. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 415—422 (1948) [Russisch].

Die von Muschelišvili (Singuläre Integralgleichungen, Moskau-Leningrad 1945) und Karcivadze [Trudy Tbiliss. mat. inst. **12** (1943)] ausgearbeitete Lösungsmethode gemischter Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie für elastische Halbebene und Kreis wird auf die Ebene mit kreisrunder Öffnung ausgedehnt. Es wird die Lösung angegeben für den Fall, daß auf einem Teil L_1 der Berandung die Verschiebungskomponenten, auf dem übrigen Teil L_2 die Spannungen gegeben sind; außerdem müssen die Hauptspannungen im Unendlichen und der Vektor aller an L_1 angreifenden Kräfte bekannt sein. Als Beispiele werden behandelt: die Scheibe

mit kreisrunder Öffnung, die im Unendlichen gleichmäßig gedehnt wird (L_1 fest mit starrer Auflage verbunden, L_2 frei) und die Scheibe mit kreisförmiger Öffnung, die im Unendlichen kräftefrei ist (auf L_1 wird ein mit L_1 starr verbundener Stempel in radialer Richtung mit der Kraft P gedrückt). In Polardiagrammen werden die Spannungsverteilungen auf der Berandung dargestellt.

Joachim Pretsch.

Filin, A. P.: Über eine Folgerung aus dem Variationsprinzip der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 451—452 (1950) [Russisch].

Der von P. F. Papkovič (Elastizitätstheorie, 1935) gegebene und auf Medien mit Hookeschem Gesetz beschränkte Beweis für die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie gilt noch für beliebiges Stoffgesetz mit existenter Enthalpie, da die verwendete Umformung der Arbeit der äußeren Kräfte in ein Volumintegral bei Ersetzung der Kräfte und Spannungen durch ihre Variationen in diesem Falle lediglich auf die Cauchy-Gleichungen führt.

Hans Richter.

Reißner, Eric: On a variational theorem in elasticity. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 90—95 (1950).

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (virt. Arbeit) erlaubt die Gleichgewichtsbedingungen der Elastizitätstheorie durch eine Energieaussage zu ersetzen, die für Näherungsüberlegungen mit Vorteil benutzt werden kann. Das Prinzip der virtuellen Kräfte (virt. Ergänzungsarbeit) erlaubt die Verträglichkeitsaussagen durch eine Energieaussage zu ersetzen, hat aber, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen nicht durch Einführung von Spannungsfunktionen abgelenken kann, den Nachteil, daß man diese als Nebenbedingungen mitschleppen muß (Verschiebungen als Lagrangesche Faktoren). Verf. zeigt, daß man diese Unbequemlichkeit des 2. Prinzips umgehen kann, indem man statt seiner eine Extremalforderung

$$\delta \left[\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \dots - W) dV - \int_{O_1} (\bar{p}_x u + \dots) dO \right] = 0$$

formuliert. Das hintere Integral ist darin über den Teil O_1 der Oberfläche O zu erstrecken, wo die Spannungen $\bar{p}_x \dots$ vorgeschrieben sind; W ist die Formänderungsenergie ausgedrückt durch die Spannungen. Als Anwendungsbeispiel gibt er eine n -erste, besonders elegante Ableitung seiner die Schubdeformation berücksichtigenden Plattengleichungen (dies. Zbl. 30, 43).

K. Marguerre.

Galin, L. A.: Abschätzung der Verschiebungen in räumlichen Kontaktaufgaben der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 241—250 (1948) [Russisch].

Für Stempel mit elliptischer Grundrißform, aber beliebiger Bodenoberfläche werden für gegebene Kräfte und Momente die Verschiebungen und Drehungen bei innigem Kontakt mit einem elastischen Körper berechnet. Die harmonische Funktion des Problems wird als Reihe in Laméfunktionen dargestellt, die nach dem dritten Gliede abgebrochen wird. Auf Grund einer elektrischen Analogie wird mit Abschätzungen von Pólya-Szegő über die Kapazität von flächeninhaltsgleichen Kondensatorplatten verschiedener Form gezeigt, daß ein Stempel mit ebener Bodenfläche beliebigen Grundrisses bei gegebener Kraft kleinere Verschiebungen erleidet als ein Stempel mit kreisrundem Grundriß gleichen Flächeninhalts.

Joachim Pretsch.

• **Štaerman, I. Ja.:** Das Kontaktproblem der Elastizitätstheorie. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1949. 270 S. R. 13,20 [Russisch].

Die Begründung der Theorie des örtlichen Druckes geht zwar auf eine bekannte Abhandlung von H. Hertz zurück, ihr weiterer Ausbau ist aber erst in den letzten Jahrzehnten, besonders durch Anwendung von Integralgleichungen intensiv gefördert worden. Verf. gibt nun eine systematische Darstellung seiner eigenen Lösungen auf diesem Gebiet im Zusammenhang mit einigen Ergebnissen anderer Forscher und der Beschreibung der üblichsten einschlägigen Methoden. — Die beiden ersten Abschnitte des Werkes behandeln das ebene Berührungsproblem. Die grundlegende singuläre Integralgleichung für die Druckintensität längs einer vorgegebenen Kontaktkurve wird auf das Randwertproblem einer Potentialfunktion im Einheitskreise zurückgeführt. Lösungsmethoden durch Einführung einer komplexen Funktion bzw. durch direkten Fourieransatz werden erörtert. Als Anwendungsbeispiele bringt Verf. zwei sich ursprünglich in einem Punkt berührende elastische Scheiben bei sehr allgemein gehaltenen

Voraussetzungen hinsichtlich ihrer Konturen, sowie das bekannte Problem eines starren Stempels auf elastischer Halbebene. Der für die Randpressung günstige Einfluß von abgerundeten Kanten an der sonst ebenen Stempelunterfläche wird durch Druckkurven illustriert und ein von N. Muschelišvili herrührendes Ergebnis über den Einfluß einer an der Kontaktfläche mitwirkenden Reibung mitgeteilt. Anschließend wird der Fall von mehreren Kontaktabschnitten, insbesondere eine periodische Berührung zweier Scheiben behandelt. Sodann befaßt sich Verf. mit dem Kontakt zwischen einem kreiszylindrischen Zapfen und einer ebensolchen Schale bei nahezu gleichen Halbmessern. Mit wachsendem Druck erweitert sich rasch der Kontaktwinkel, und die Ergebnisse weichen dann von denen der Hertzschen Theorie erheblich ab. Zum Schluß macht Verf. einen interessanten Versuch, die Rauhgigkeit der Kontaktfläche durch eine Art Kombination der Hertzschen Theorie mit der Winklerschen Bettungstheorie zu erfassen. — Abschnitt III enthält eine Theorie des achsensymmetrischen Kontaktes, die wiederum vermittels Integralgleichungen entwickelt wird. Der Sonderfall, in dem die ursprüngliche Kontaktstelle zugleich ein singulärer Punkt einer Begrenzungsfläche (z. B. eine Kegelspitze) ist, erscheint bemerkenswert. Anschließend wird der starre Kreiszylinderstempel mit abgerundeten Kanten ausführlich behandelt und das Problem eines starren elliptischen Stempels unter Heranziehung von Potentialtheorie der Lösung zugeführt. Schließlich gelangt die Hertzsche Lösung des Druckproblems zur Erörterung; Verf. verallgemeinert diese Lösung unter gewissen erweiterten Voraussetzungen für die Form der Kontaktfläche. Im Anhang findet man u. a. Angaben über Auflösung einer Gattung singulärer Integralgleichungen durch Differenzenrechnung. — Der sehr eingehenden Behandlung des Stoffes folgt man überall ohne Schwierigkeit; spezielle Vorkenntnisse werden beim Leser kaum vorausgesetzt. *S. Woinowsky-Krieger.*

Yu, T. M.: Shearing stresses in curved beams. *Sci. Record, Acad. Sinica* 2, 401—408 (1949).

Verf. untersucht in vorliegender Arbeit die auftretenden Schubspannungen in stark gekrümmten Balken, die eine Symmetrieebene besitzen. Unter Berücksichtigung der Radialspannungen σ_r und der Radialdehnungen ϵ_r gelingt es ihm, eine verhältnismäßig einfache Formel für die Schubspannungen zu finden, während die bisher bekannte Theorie von Winkler und Bach, die hauptsächlich bei schwach gekrümmten Balken Anwendung fand, diese Einflüsse vernachlässigte. Die Anwendung dieser Formel zeigt Verf. an Hand von zwei Beispielen und zwar bei einem stark gekrümmten Balken von 90° Öffnung mit konstantem Rechtecksquerschnitt, der an einem Ende mit einer Querkraft belastet ist, sowie bei einem Balken mit Kreisquerschnitt gleicher Belastungsart. Die Ergebnisse wurden in einer Tabelle und in einem Schaubild zusammengestellt und mit Ergebnissen der strengen (mathematischen) Theorie verglichen. Die Übereinstimmung ist eine ausgezeichnete. *Karl Karas.*

Mitra, D. N.: Torsion and flexure of a beam whose cross-section is a sector of a circle. *Bull. Calcutta math. Soc.* 42, 131—144 (1950).

Es wird in dieser Arbeit eine neue funktionentheoretische Methode zur Lösung des Problems der Biegung und Torsion eines Balkens benutzt, dessen Querschnitt einen Kreissektor bildet. Diese Methode ist eine Erweiterung des von S. Ghosh (siehe dies. Zbl. 35, 252 und frühere Arbeiten aus den Jahren 1947 und 1948 in derselben Serie) entwickelten und von ihm angewandten Verfahrens zur Lösung des Problems der Biegung und Torsion von Balken, deren Querschnitte zum Teil durch gerade Linien begrenzt sind. Durch Anwendung der konformen Abbildung $z = \zeta^n$ wird der Kreissektor auf einen Halbkreis abgebildet und das Problem auf die Ermittlung einer Funktion zurückgeführt, die innerhalb des Halbkreises analytisch ist, deren Imaginärteil auf dem begrenzenden Durchmesser verschwindet und auf dem Umfang des Halbkreises gewisse vorgeschriebene Werte annimmt. Diese Funktion wird durch das Spiegelungsprinzip auf die andere Kreishälfte analytisch fortgesetzt und mit Hilfe der Formeln von H. A. Schwarz ermittelt. Die Ergebnisse dieser Arbeit stimmen mit denjenigen von A. C. Stevenson direkt überein [*Phil. Trans. R. Soc. London, A* 237, 161—229 (1938); dies. Zbl. 19, 239].

Rolf Gran Olsson.

Goodier, J. N.: Elastic torsion in the presence of initial axial stress. *J. appl. Mech., New York* 17, 383—387 (1950).

Die experimentell bekannte Tatsache, daß die Torsionssteifigkeit eines Balkens durch Anwesenheit von Zug, Druck oder Biegung beeinflußt werden kann, insbesondere bei dünnwandigem, offenem Querschnitt, wird hier theoretisch erfaßt auf Grund der Erfüllung der Gleichgewichts- und Randbedingungen am verformten Element nach der Methode von Trefftz und Kappus. Verf. geht von dem Ansatz aus, daß einem allgemeinen Vorspannungszustand S_{xx}, S_{xy}, \dots ein Spannungszustand überlagert wird, der mit infinitesimalen Formänderungen nach dem Hooke'schen Gesetz verknüpft ist. Der überlagerte Zustand wird spezialisiert zu einem reinen Torsionszustand nach dem de St. Venantschen Ansatz; die Berechnung der Gleichgewichtsbedingungen an den Balkenenden gibt dann infolge der Anwesenheit der Vorspannungen einen von S_{zz} (z -Richtung ist Balkenachse) abhängenden zusätzlichen Summanden in dem de St. Venantschen Ausdruck für das Torsionsmoment und außerdem Schubkräfte in Richtung der drei Koordinatenachsen und Biegemomente in der x - und y -Richtung. Ist der Vorspannungszustand ein reiner konstanter Längszug, so ergibt sich für das Torsionsmoment die bereits von M. A. Biot abgeleitete Formel. Diese Formel und ebenso die für anfängliche reine Biegung des zu verdrehenden Balkens abgeleitete Formel für das Torsionsmoment stehen in guter Übereinstimmung mit Experimenten. *Ruth Moufang.*

Pflanz, E.: Notiz zur Stabbiegung. Z. angew. Math. Mech. **30**, 393—394 (1950).

Es sei $p_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ mit ganzzahligem $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$ die eindeutig bestimmte Parabel höchstens $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$ -ter Ordnung in x , welche die Biegelinie $y(x)$ eines an beiden Enden ($x = \pm h$) gelenkig gelagerten Stabes α_1 -punktig bzw. α_2 -punktig berührt. Für die Abweichung $y(x) - p_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ im Intervall $-h \leq x \leq h$ gilt:

$$y(x) = p_{\alpha_1, \alpha_2}(x) + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)!} (x + h)^{\alpha_1} (x - h)^{\alpha_2} y^{\alpha_1 + \alpha_2}(z),$$

wo z eine gewisse Zwischenlänge längs des Stabes angibt. Weiter werde die Voraussetzung gemacht, daß die Belastung $q(x)$ überall gleichgerichtet sei. — Folgende einfache Beziehungen lassen sich aufstellen: 1. Der Schnittpunkt der Tangenten der Biegelinie an den Stützen hat die Abszisse $\bar{x}/h = (y'_+ + y'_-)/(y'_+ - y'_-)$ wo y'_+ und y'_- die Neigungen der Tangenten an den Stützen bezeichnen. 2. Mit den Winkeln ω_-, ω_+ definiert durch $\operatorname{tg} \omega_- = y'_-$, $-\operatorname{tg} \omega_+ = y'_+$ und $y(0) = y_0$ ergibt sich die Ungleichung: $\frac{1}{8} l (\operatorname{tg} \omega_- + \operatorname{tg} \omega_+) \leq y_0 \leq \frac{3}{8} l \operatorname{Min} (\operatorname{tg} \omega_-, \operatorname{tg} \omega_+)$. Bei einer Belastung, die zu $x = 0$ symmetrisch ist, folgt daraus $l \operatorname{tg} \omega_-/4 \leq y_0 \leq 3 l \operatorname{tg} \omega_-/8$ sowie die Näherung $y_0 \approx 5 l \operatorname{tg} \omega_-/16$. Sind die Endtangente zeichnerisch gegeben, so führt die erste der angegebenen Ungleichungen zu einer einfachen Konstruktion zur Eingrenzung von y_0 . 3. Die für stetige Belastung $q(x) > 0$ aufgestellten Ungleichungen bleiben auch bei unstetigem $q(x)$ sowie im Falle des Auftretens von Einzellasten gültig, falls sämtliche Lasten vertikal und gleichgerichtet wirken, und die Unstetigkeiten nur in endlicher Zahl auftreten.

Rolf Gran Olsson.

Džanelidze, G. Ju.: Verallgemeinerte Beziehungen in der Theorie der dünnen Stäbe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 597—600 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Erörterung des Effekts, hervorgerufen durch Verallgemeinerung der angenäherten Formeln von G. Kirchhoff in der Theorie dünner Stäbe (s. A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed. Cambridge 1927, p. 447). Diese Verallgemeinerung wird dadurch erzielt, daß im Ausdruck für das Drillungsmoment der von der zweiten Ableitung des Verdrehungswinkels abhängige Term mitberücksichtigt wird.

Rolf Gran Olsson.

Takeuti, Yoitiro: Stresses in a plate with a circular hole under concentrated loads solving by delta-function. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 123—125 (1949).

Die Arbeit behandelt die Wirkung von Einzellasten am Rande eines kreisförmigen Loches in einer Scheibe mit Hilfe der Diracschen Deltafunktion. Im

Fälle eines elliptischen Loches werden elliptische Koordinaten eingeführt, wonach die Rechnung ähnlich wie beim kreisförmigen Loch verläuft. *R. Gran Olsson.*

Galin, L. A.: Über den Druck eines starren Körpers auf eine Platte. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **12**, 345—348 (1948) [Russisch].

Es wird die Kontaktfläche auf eine kreisrunde eingespannte Scheibe berechnet, auf die von einem starren Körper ein Druck ausgeübt wird. Sie hat ebenso wie beim Druck eines elliptischen Körpers auf einen elastischen Halbraum elliptische Form.

Joachim Pretsch.

Chandra Das, Sisir: Note on the bending of certain thin elastic plates by concentrated loads. *Bull. Calcutta math Soc.* **42**, 89—93 (1950).

Im Anschluß an eine Methode von B. Sen [*Indian phys.-math. J.* **3**, 17—20 (1934); *Phil. Mag.*, London **33**, 294 (1942)] läßt sich die elastische Durchbiegung einer dünnen Platte der Biegesteifigkeit D unter konzentrierter Belastung P in manchen Fällen leicht bestimmen, wenn nämlich die Begrenzung der Platte eine Kurve der Schar $\eta = \text{const.}$ ist, wobei ξ, η als Funktionen von x, y gegeben sind vermöge $x + iy = f(\xi + i\eta)$ und die Kurven $\eta = \text{const.}$ geschlossene Kurven sind. Dies läuft darauf hinaus, bei gegebenem f eine Lösung von $\Delta \Delta w = 0$ für die Durchbiegung w der Platte zu finden, die am Rand den Bedingungen $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ genügt und in $D \int \frac{\partial}{\partial n} \Delta w \, ds = P$, erstreckt über eine Kurve der Schar $\eta = \text{const.}$, das Integral unabhängig von der Länge der geschlossenen Kurve macht. Die Rechnung wird durchgeführt für $f = \text{const.} \cdot \sec(\xi + i\eta)$ und für $f = 2c \sec^2 \frac{1}{2}(\xi + i\eta)$.

Ruth Moufang.

Collatz, L.: Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben. *Z. angew. Math.* **30**, 385—388 (1950).

Wie bei den anderen Arten von Differenzenverfahren wird beim Mehrstellenverfahren [L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949, S. 350—355, 361—371; dies. *Zbl.* **35**, 175] ein etwa quadratisches Gitter von der Maschenweite h mit den Gitterpunkten $x_j = x_0 + jh$, $y_k = y_0 + kh$ eingeführt und zur Anwendung auf die Gleichung der Durchbiegung u der dünnen Platte $\Delta \Delta u = p(x, y) N$ eine Summe gebildet: $B = \sum_{j,k} (a_{jk} u_{jk} + A_{jk} (\Delta \Delta u)_{jk})$, wo

die Summe über eine gewisse Anzahl von Gitterpunkten zu erstrecken ist, bei u und $\Delta \Delta u$ die angehängten Indizes j, k die Werte an der Stelle x_j, y_k bezeichnen und die Beiwerte a_{jk}, A_{jk} so zu bestimmen sind, daß bei einer Taylorschen Entwicklung aller Glieder der Summe nach u_{00} und den partiellen Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) die Koeffizienten von $\mathcal{O}^{(\alpha+\beta)} u / \partial x^\alpha \partial y^\beta$ bis zu möglichst hohen Werten von α und β verschwinden. Dann soll $\sum_{j,k} \left(a_{jk} U_{jk} + A_{jk} \frac{p_{jk}}{N} \right) = 0$ eine Gleichung für

die Näherungswerte U_{jk} (Näherung für u_{jk}) sein. — Es werden Beispiele zur Erläuterung der aufgestellten Gleichungen gegeben: 1. Eigenschwingungen einer quadratischen, ringsum frei aufliegenden Platte. 2. Platte mit sechseckigem Grundriß und durch $p = \text{konst.}$ gleichmäßig belastet, wobei die beiden rechtwinklig aufeinander stoßenden Seiten fest eingespannt sind, während die vier anderen ebenfalls rechtwinklig zueinander stehenden Seiten frei gelagert sind. Ferner werden für Dreiecksnetze, wie sie bei Dreiecksplatten vorkommen [z. B. H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Theorie biegsamer Platten*. 2. Aufl. Berlin 1932; sowie H. Göttlicher, *Ing.-Arch.* **11**, 12—19 (1938); entsprechende Formeln wie bei quadratischen Netzen aufgestellt. Für andere Gleichungen der Durchbiegung der Platte sind die Formeln des Mehrstellenverfahrens durch Taylorsche Entwicklung jeweils neu aufzustellen. Insbesondere, wenn die Steifigkeit der Platte und damit die Beiwerte der Ableitungen veränderlich sind, kann die Rechnung nach dem Mehrstellenverfahren sehr mühsam werden.

Rolf Gran Olsson.

Luisoni, Cesar J.: Anwendung der Galerkinschen Methode auf die Lösung von Problemen der eingespannten Rechtecksplatten. Ihre Vorteile gegenüber anderen Methoden. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fisicomat., Rev. 4, 89—122 (1947) [Spanisch].

Die Methode von Galerkin setzt die unbekannte Durchbiegung w als lineare Kombination gegebener Funktionen φ_k an, die die Randbedingungen erfüllen, die w erfüllen soll, und gewinnt aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen durch Gleichsetzung der Variation der Arbeit der inneren und der äußeren Kräfte für die unbekannten α_i in $w = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n$ die Gleichungen

$$\iint_{\delta} \left(\Delta w - \frac{q}{N} \right) \varphi_k dx dy = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

[N = Plattensteifigkeit, $q(x, y)$ = Belastung pro Flächeneinheit]. Für die eingespannte Rechteckplatte wird die Rechnung durchgeführt mit dem Ansatz $n = 4$, wobei jedes φ_k Produkt eines passenden Polynoms in x mit einem passenden Polynom in y ist. Die α_1 bis α_4 bestimmen sich aus einem System von vier linearen Gleichungen, die allein vom Seitenverhältnis b/a der Platte abhängen und für verschiedene Werte von b/a leicht einer Tabellierung zugänglich sind. Ist so ein Näherungswert für w ermittelt, ergeben sich Biege- und Torsionsmomente, Schubkräfte und Reaktionskräfte in der bekannten Weise durch Differentiation. Tabellen und Kurven zeigen den Vergleich der so erhaltenen Werte mit den Werten, die die Methoden von Marcus, Lorenz, Nádai und Timoshenko ergeben. Verf. kommt zu dem Schluß, daß die approximative Methode von Galerkin wegen ihrer Einfachheit der sehr mühsamen Berechnung bei der exakten Methode von Timoshenko vorzuziehen ist. Die Lösung von Lorenz ist gut brauchbar für die Berechnung der Durchbiegungen für $b/a \leq 1,5$, ist aber ungeeignet zur Berechnung der Normalspannungen. Die Näherungslösung von Nádai kann angewandt werden zur Berechnung des Biegepeils für $b/a \leq 2$ und zur Berechnung der Normalspannungen für $b/a \leq 1,5$. Einschränkungen für b/a existieren in der Anwendungsfähigkeit der Galerkinschen Methode nicht.

Ruth Moufang.

И'ин, Ja. K.: Bestimmung der Spannungen in einer rotierenden Kreisscheibe mit exzentrischer Rotationsachse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 803—806 (1949) [Russisch].

Diese Note enthält einen Auszug der Lösung des folgenden Problems: Es sind die Spannungen in einer dünnen elastischen Kreisscheibe zu ermitteln, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse senkrecht zur Scheibenebene in einer Entfernung δ vom Scheibenmittelpunkt rotiert. Das Problem ist auf die Lösung eines ebenen Problems der Elastizität nach einem Verfahren von Muschelišvili zurückgeführt. Die vom Verf. gegebene Lösung wird für $\delta = 0$ auf bereits bekannte Resultate zurückgeführt. (Nach Ansicht des Ref. wird man mit Hilfe der bekannten Transformation durch reziproke Radien von J. H. Michell [Proc. London math. Soc. 31, 100 (1900)] ebenfalls zu einer Lösung des behandelten Problems gelangen.)

Rolf Gran Olsson.

Vajnberg, D. V.: Örtliche Spannungen in einer ebenen, ringförmigen Scheibe unter zwei Einzelkräften. Prikl. Mat. Mech., Moskva 13, 151—158 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine eingehende Berechnung der örtlichen Spannungen in einer ebenen, ringförmigen elastischen Scheibe, die durch zwei Einzelkräfte am äußeren und inneren Rand des Ringes belastet wird. Die Lösung geht auf die Ermittlung von zwei analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen hinaus und folgt den Lösungsmethoden ebener Probleme der Elastizität, wie sie von N. I. Muschelišvili entwickelt sind. Als Grenzfall enthält man die bereits bekannte Lösung des entsprechenden Problems für den unendlichen Streifen. Zahlenbeispiele mit graphischer Darstellung der Spannungsverteilung.

Rolf Gran Olsson.

Šaišmelašvili, V. N.: Zur Berechnung einer sehr flachen Kugelschale, die durch Biegemomente belastet ist. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 10, 397—403 (1949) [Russisch].

Šaišmelašvili, V. N.: Angenäherte Berechnung einer hinreichend flachen Kugelschale bei gegebener Deformation der Kontur. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 10, 609—614 (1949) [Russisch].

Avram, Constantin N.: La généralisation de la méthode Cross. I. Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timișoara 13, 193—216 (1948).

Der erste Teil eines zusammenfassenden Berichtes über die Crosssche Methode für die statische Berechnung der in ihrer Ebene belasteten Rahmenwerke. Es wird die Berechnungsgrundlage für Rahmen mit unverschieblichen Knotenpunkten in übersichtlicher Form abgeleitet und auf ein Zahlenbeispiel angewendet.

Bekir Dizioğlu.

Avram, Constantin N.: La généralisation de la méthode Cross. II. Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timișoara 13, 305—333 (1948).

In diesem zweiten Teil der Arbeit (s. vorsteh. Referat) gibt Verf. die zur Durchführung der Crossschen Methode erforderlichen Berechnungsgrundlagen für Rahmenwerke mit verschieblichen Knotenpunkten an. Hierbei wird auch die Anwendung der Methode der virtuellen Arbeit bei Rahmenwerken mit und ohne Zugband mitberücksichtigt.

Bekir Dizioğlu.

Kuhelj, Anton: On the determination of internal forces in two-spar wings. Acta techn., Ljubljana, Ser. Math. appl. Mech. 1, Nr. 1, 1—12 und engl. Zusammenfassg. 13 (1950) [Slovenisch].

Schnadel, Georg: The strength of transversely stiffened decks of ships. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 256—267 (1949).

Green, A. E. and R. T. Shield: Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies. Proc. R. Soc., London, A 202, 407—419 (1950).

Verff. nehmen Bezug auf sieben in neuerer Zeit erschienene Arbeiten von R. S. Rivlin (dies. Zbl. 29, 326, 327, 31, 426, 33, 408, 35, 415, 36, 249), die auf Tensorschreibweise verzichten, und geben im Anschluß an eine Arbeit von A. E. Green und W. Zerna (dies. Zbl. 36, 132) eine zusammenfassende tensorielle Darstellung der Theorie endlicher Formänderungen eines isotropen elastischen Körpers, insbesondere bei Inkompressibilität unter Zugrundelegung eines allgemeinen Koordinatensystems, das während der Deformation mit dem Körper fest verbunden ist. Die Definition des Spannungs- und Verzerrungstensors, die dynamischen Grundgleichungen, die Randbedingungen, die Relationen zwischen den Spannungskomponenten und dem elastischen Potential (falls ein solches existiert) werden zusammengestellt, wobei zugleich die Theorie von Murnaghan ein wenig vereinfacht erscheint. An 3 Beispielen wird der Formelapparat erläutert: 1. Reine Torsion eines Kreiszylinders. 2. Rotation eines Kreiszylinders um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. 3. Biegung einer Kugelschale unter gegebenem Innen- und Außendruck bei Berücksichtigung der Grenzfälle $r_i/r_a = 0$, $r_i/r_a = 1 - \epsilon$.

Ruth Moufang.

Cicala, Placido: Sulle deformazioni plastiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 583—586 (1950).

In einer Note (A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. „NACA. tech. Note“ 1871, April 1949) haben S. B. Batdorf und B. Budiansky ein Verformungsgesetz aufgestellt, das anderen Charakter hat als die bisherigen Gesetze vom Fließtypus bzw. vom Deformationstypus, indem die plastische Deformation als Resultierende der Gleitungen aufgefaßt wird, die die Tangentialspannung in allen möglichen Richtungen in jeder der möglichen Schnitterrichtungen hervorruft nach einem Gesetz, das von dem Anwachsen dieser Tangentialspannung und von den Materialeigenschaften abhängt. Man gelangt so zu

komplizierten Formeln mit mehrfachen Integralen, die hier in dem Spezialfall ausgewertet werden, daß ein Körper durch einachsigen Zug plastisch verformt und alsdann zusätzlichen infinitesimalen Formänderungen unterworfen wird. Die Resultate gestatten einen Vergleich mit den Theorien von Reuß und Hencky. Insbesondere ergibt sich für den Zug-Torsionsversuch, bei dem nach plastischer Verformung durch Zug gleichzeitig mit der Aufbringung der Torsion die Zugkraft in einem oder anderem Sinne geändert wird, theoretisch nach Batdorf und Budiansky eine unterschiedliche Beeinflussung des Schubmoduls, im Gegensatz zur Theorie von Reuß.

Ruth Moufang.

Kuskov, A. M.: Erzwungene elastische stationäre Schwingungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 197—200 (1950) [Russisch].

Das Äußere der geschlossenen Fläche S im dreidimensionalen Raume sei erfüllt von einem homogenen, isotropen elastischen Medium. In den Punkten N von S seien die Spannungen $\vec{f}(N)$ stationär harmonisch mit der Kreisfrequenz ω vorgeschrieben. Zu lösen sind dann die Wellengleichungen $\Delta \varphi + k_1^2 \varphi = 0$ und $\Delta \vec{\psi} + k_2^2 \vec{\psi} = 0$ für skalares Potential φ und Vektorpotential $\vec{\psi}$ bei $k_1^2 = \omega/c_l$ und $k_2^2 = \omega/c_t$ ($c_l > c_t$ sind die longitudinale und transversale Wellengeschwindigkeit) mit den \vec{f} entsprechenden Randbedingungen. φ und $\vec{\psi}$ werden mit Hilfe der der Ausstrahlungsbedingung genügenden Quellstörungen $\text{grad}(e^{-ik_r r}/r)$ als Integrale über S mit unbekannter vektorieller Quelldichte $\vec{v}(N)$ angesetzt. Die Randbedingungen führen zu einem System von drei Fredholmschen Integralgleichungen für die Komponenten von \vec{v} ; die Lösung existiert für alle ω . — Die entsprechende Aufgabe für das Innere von S führt zum gleichen Integralgleichungssystem, das für $\omega \neq \omega_n$ eindeutig lösbar ist, wenn ω_n die Eigenfrequenzen bei vorgegebenen harmonischen Randverschiebungen sind.

Hans Richter.

Päsler, Max: Die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf von thermisch gedämpften elastischen Schwingungen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **4**, 14—24 (1948).

Die Bewegungs- und Wärmeleitungsgleichungen eines elastischen Körpers sind bei Berücksichtigung der thermoelastischen Effekte miteinander gekoppelt. Dies führt zur Dissipation von mechanischer Energie und zur Dämpfung von Eigenschwingungen des Körpers. Aus dem Ansatz, daß bei Eigenschwingungen elastische Verschiebung und Temperaturschwankung ein Produkt aus einer Ortsfunktion und einer Zeitfunktion sind, leitet Verf. durch Elimination der Temperatur eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Verschiebung von der Form

$$\frac{d^3 F}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 F}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{E}\right) \frac{dF}{dt} + \omega_0^2 \gamma F = 0$$

her, wobei die Koeffizienten außer von den Materialkonstanten noch von der speziellen Schwingungsform abhängen. — Vorstehende Differentialgleichung war früher schon von Bannwitz und Rötger [Phys. Z. **37**, 578 (1936)] und dem Verf., jedoch unter spezielleren Voraussetzungen, aufgestellt worden. *Arnold Schoch.*

Zavriev, K. S.: Analyse des Fehlers bei der Untersuchung freier Schwingungen von Balken mit unendlich vielen Freiheitsgraden mit der Methode der sukzessiven Approximationen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR **10**, 103—106 (1949) [Russisch].

Sechniašvili, Ė. A.: Bestimmung der Frequenzen freier Schwingungen von Balken mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR **10**, 405—412 (1949) [Russisch].

• **Trendelenburg, Ferdinand:** Einführung in die Akustik. Zweite, umgearbeitete Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VIII, 378 S. DM. 39,00.

Hydrodynamik:

Bilharz, Herbert: Über eine Anwendung des Dirichletschen Diskontinuitätsfaktors in der Strömungslehre. Arch. Math., Karlsruhe 2, 27—32 (1949/50).

Zur Lösung der Aufgabe, auf der mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht angeströmten y -Achse eines x, y, z -Raumes eine Zirkulationsverteilung $\gamma(y)$ derart zu bestimmen, daß ihr die geometrische Anstellwinkelverteilung

$$\alpha^*(y) = \begin{cases} 2\delta(0 \leq |y| < l) \\ \delta(|y| = l) \\ 0(|y| > l) \end{cases} \quad (\delta \text{ konstant})$$

entspricht, wird in der zugehörigen Prandtlschen Integro-Differentialgleichung α^* durch den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor ausgedrückt und $\gamma(y)$ als Fourier-sches Integral angesetzt. Es zeigt sich, daß sich $\gamma(y)$ in einfachster Weise mit Hilfe der Funktionen si und Ci ausdrücken läßt. Ganz analog läßt sich $\gamma(y)$ bestimmen, wenn

$$\alpha^*(y) = \begin{cases} 2\delta \operatorname{sgn} y (l_1 \leq |y| \leq l_2) \\ \delta \operatorname{sgn} y (|y| = l_1, |y| = l_2) \\ 0 \quad (0 \leq |y| < l_1, |y| > l_2) \end{cases}$$

vorgegeben ist. Für eine Reihe von Zahlenbeispielen wurden die Ergebnisse in Diagrammen dargestellt.

Karl Maruhn.

Pignedoli, Antonio: Sui vortici cilindrici. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 102—124 (1949).

In einer inkompressiblen, homogenen, reibungsfreien Flüssigkeit befinde sich eine unendlich lange, zylindrische Wirbelröhre von endlichem Querschnitt, die gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse rotiert. Notwendig und hinreichend dafür, daß die ebene, durch die Wirbelröhre erzeugte Flüssigkeitsbewegung bezüglich eines mit ω mitrotierenden Achsenkreuzes stationär ist, ist bekanntlich, daß die Wirbelstärke ζ der Röhre eine Funktion von $\Psi = \psi + \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2)$ (ψ Stromfunktion der Wirbelbewegung) allein ist. Verf. leitet dies noch einmal her und betrachtet dann speziell ζ als lineare Funktion von Ψ . In diesem Falle läßt sich die Bestimmung von Ψ mittels einer Hilfsfunktion W auf die Lösung der Wellengleichung $\Delta W + \lambda W = 0$ mit der Randbedingung $W = 0$ zurückführen, wobei ja bekanntlich unendlich viele positive Eigenwerte existieren. Die Lösungen sind dann noch daraufhin zu prüfen, ob sie hydrodynamisch sinnvoll sind, d. h. ob die Stetigkeit von Geschwindigkeit und Druck beim Durchgang durch die Berandung der Wirbelröhre gewährleistet ist. Ein Beispiel hierfür bildet die kreiszylindrische Röhre. — Unter der Voraussetzung konstanter Wirbelstärke wird schließlich noch mittels Anwendung einer geeigneten konformen Abbildung der Fall eines von einer Epizykloide begrenzten Röhrenquerschnittes behandelt.

Karl Maruhn.

Rott, Nikolaus: Flügelschwingungsformen in ebener kompressibler Potentialströmung. Z. angew. Math. Phys., Basel 1, 380—410 (1950).

Die Energiemethode zur Behandlung des Flutterproblems in ebener Potentialströmung wird für zwei Freiheitsgrade (Schlag- und Drehschwingung) ausführlich dargestellt. Die Ergebnisse werden für den ganzen Machzahlbereich von $M = 0$ bis $M = \infty$ diskutiert und in Schaubildern wiedergegeben, wobei die Luftkraftkoeffizienten der vorhandenen Literatur entnommen werden, mit Ausnahme des Sonderfalls $M = 1$, für den Verf. eigene Formeln beibringt. Insbesondere ergibt sich eine von M abhängige obere Grenze der reduzierten Frequenz, oberhalb deren keine angefachten Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden möglich sind. Für reine Drehschwingungen liegt diese Grenze wesentlich niedriger, für $M > \sqrt{2}$ sind angefachte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad unmöglich. Aus den Ergebnissen werden konstruktive Vorschläge zur Flatterverhütung gefolgert.

Johannes Weissinger.

Viguier, Gabriel: Écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un tube mince incliné. *Periodicum math.-phys. astron.*, Zagreb, II. S. 3, 202—207 und kroatische Zusammenfassg. 208 (1948).

Verf. wendet die von ihm vertretene Anschauung, daß bei starken Geschwindigkeitsgradienten die Schubspannung nicht mehr genau genug proportional der Deformationsgeschwindigkeit ist, auf das Problem des Schrägrohr-Differential-Viskosimeters nach Poiseuille an. In den Bewegungsgleichungen treten also zusätzliche Zähigkeitsglieder dritten Grades auf. Durch einige Umformungen gelingt es, das Problem auf eine Integro-Differentialgleichung zurückzuführen, deren Lösung ziemlich aussichtslos erscheint, jedoch vom Verf. für eine spätere Veröffentlichung in Aussicht gestellt wird.

Walter Wuest.

Viguier, Gabriel: Répartition tourbillonnaire d'un fluide visqueux incompressible dans le mouvement à deux dimensions. *Periodicum math.-phys. astron.*, Zagreb, II. S. 3, 209—212 und kroatische Zusammenfassg. 212 (1948).

Die vom Verf. entwickelten Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten, die gegenüber den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen zusätzliche Zähigkeitsglieder dritten Grades im Geschwindigkeitsgradienten enthalten, werden in die Wirbelgleichungsform umgewandelt, die man in bekannter Weise durch Differentiation und geeignete Zusammenfassung der ursprünglichen Gleichungen erhält.

Walter Wuest.

Thriot, K.-H.: Grenzschichtströmung kurz nach dem plötzlichen Anlauf bzw. Abstoppen eines rotierenden Bodens. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 390—393 (1950).

Die Beiwertfunktionen der Reihenentwicklungen für die Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschichtströmung genügen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die in einer früheren Arbeit des Verf. [*Z. angew. Math. Mech.* 20, 1—13 (1940)] nicht richtig dargestellt waren. Die richtiggestellten Gleichungen werden in geschlossener Form integriert, die Lösungen in Tabellen- und Diagrammform wiedergegeben und die Richtung der Stromlinien am Boden ausgerechnet.

Johannes Weissinger.

Wecken, Franz: Stoßwellenverzweigung bei Reflexion. *Z. angew. Math. Mech.* 28, 338—341 (1948).

Beim Auftreten eines schiefen Verdichtungsstoßes auf eine gerade Wand ist die reguläre Reflexion nur für kleinere Einfallswinkel möglich, während sich bei großem Einfallswinkel eine Stoßwellengabel (Mach-Effekt) bildet. Verf. zeigt, daß die Grenze der regulären Reflexion bei schwachen Stoßwellen (Druckverhältnis $p_1/p_2 < 0,44$) durch das Kriterium von Schultz-Grunow, für starke Stoßwellen ($p_1/p_2 > 0,44$) dagegen durch dasjenige von Cranz-Schardin gegeben ist. Während im letztgenannten Fall der Übergang zum Macheffekt erfolgt, treten bei schwachen Stoßwellen beim Überschreiten der Grenzkurve sprunghafte Änderungen im Abstromgebiet auf.

Walter Wuest.

Richter, Hans: Die Stabilität des Verdichtungsstoßes in einer konkaven Ecke. *Z. angew. Math. Mech.* 28, 341—345 (1948).

Bei der Berechnung des Verdichtungsstoßes in einer konkaven Ecke oder bei einem Keil von nicht zu großem Öffnungswinkel ist die Lösung im allgemeinen zweideutig („schwache“ und „starke“ Verdichtungsstoße). Die bisher üblichen Begründungen für die Bevorzugung der schwachen Lösung werden vom Verf. abgelehnt. Statt dessen wird eine instationäre, rein mechanische Stabilitätsbetrachtung durchgeführt, die sich auf die Abhängigkeit der Stromlinienablenkung von der Stoßintensität („Herzkurve“ nach Weise) stützt. Eine qualitative Betrachtung über die Wirkung eines Hindernisses im Abstromgebiet hinter der Stoßfront zeigt, daß ein an einer starren Wand ansetzender starker Stoß instabil ist. Diese Überlegung scheint durch einen experimentellen Befund von

Oswatitsch bestätigt zu werden, der bei erzwungenem starken Stoß ein periodisches Hin- und Herpendeln der Stoßfront feststellte. *Walter Wuest.*

Friedrichs, K. O.: Formation and decay of shock waves. Commun. appl. Math., New York **1**, 211—245 (1948).

Verf. hat in dem zusammen mit R. Courant herausgegebenen Buch „Supersonic flow and shock Waves“ (New York 1948) ein Näherungsverfahren zur Berechnung eindimensionaler unstetiger und zweidimensionaler stetiger Gasströmungen mit Verdichtungsstößen beschrieben, das darauf beruht, daß nur Glieder bis zum 2. Grade in der Stoßstärke berücksichtigt werden, so daß also die Entropieänderung an der Stoßfront unberücksichtigt bleibt. Vorliegende Abhandlung gibt eine abweichende Darstellung dieses Näherungsverfahrens sowie eine ausführliche Diskussion von Sonderfällen. Diese beziehen sich einmal auf die Bildung einer Stoßwelle bei beschleunigter Bewegung eines Kolbens in einem Rohr, auf das Abklingen der Stoßwelle bei Verzögerung der Kolbenbewegung, sowie auf die Bildung einer „N-Welle“ bei erneuter Beschleunigung des Kolbens. Ein weiterer Abschnitt behandelt andererseits das Auftreten stationärer Stoßfronten an dünnen Profilen.

Walter Wuest.

Lax, Anneli: Decaying shocks. A comparison of an approximate analytic solution with a finite difference method. Commun. appl. Math., New York **1**, 247—257 (1948).

Um die Genauigkeit des Näherungsverfahrens von Friedrichs (s. vorsteh. Referat) zu überprüfen, wird das entsprechende Wasserwellengleichnis behandelt und zwar einmal nach dem Näherungsverfahren von Friedrichs, zum anderen nach dem Charakteristikenverfahren. Bei einem Verhältnis der Flüssigkeitshöhen vor und hinter dem Wassersprung von $h_1/h_0 = 1,8$ liegen die Abweichungen innerhalb der Zeichengenauigkeit, während sie bei $h_1/h_0 = 3$ zwar schon merkbar, aber immerhin noch sehr klein sind.

Walter Wuest.

Friedrichs, K. O.: On the non-occurrence of a limiting line in transonic flow. Commun. appl. Math., New York **1**, 287—301 (1948).

Verf. zeigt, daß das Auftreten von Verdichtungsstößen bei überkritischer Unterschallströmung an Tragflügeln nicht auf die Bildung von „Grenzlinien“ zurückzuführen ist. Der Beweis wird dadurch geführt, daß das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante $J = y_u x_v - y_v x_u$ der Transformation der (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene an der Wand, im Überschallbereich und auf der Schallgrenzlinie bewiesen wird. Für den letztgenannten Fall wird zum Beweis ein von D. A. Flanders gelöstes und im Anhang mitgeteiltes algebraisches Problem herangezogen.

Walter Wuest.

Oswatitsch, Klaus: Die Geschwindigkeitsverteilung an symmetrischen Profilen beim Auftreten lokaler Überschallgebiete. Acta phys. Austriaca **4**, 228—271 (1950).

Reine Unterschallströmungen um dünne Profile können näherungsweise nach der Prandtl'schen Regel berechnet werden, die darauf beruht, daß die Stromdichtefunktion durch eine Gerade ersetzt wird. Im schallnahen Bereich mit örtlichen Überschallgebieten wird dagegen eine parabolische Approximation nahegelegt, weil die Stromdichte nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt. Diese parabolische Approximation führt zu einem Ähnlichkeitsgesetz für die schallnahe Strömung, das zuerst von Guderley erwähnt und vom Verf. (1947) ausführlich behandelt wurde. Die Prüfung dieses Ähnlichkeitsgesetzes an Versuchen von Göthert hat gezeigt, daß bereits bei Profildicken von 15—18% die Verdichtungsstöße systematisch weiter stromaufwärts rücken, daß also das Ähnlichkeitsgesetz nur für sehr dünne Profile gilt. Während nach der Prandtl'schen Regel die Geschwindigkeitsverteilung auf die Lösung der Randwertaufgabe der inkompressiblen Strömung zurückgeführt und durch eine Quellbelegung der Profilachse erzeugt werden kann, muß bei parabolischer Approximation noch eine zusätzliche Quellverteilung in der ganzen Strömung

mungsebene hinzugenommen werden, um die Abweichungen der Stromdichte von der „Prandtlgeraden“ zu berücksichtigen. Bei symmetrischen, nicht angestellten Profilen, auf die sich die weiteren Ausführungen ausschließlich beziehen, ergeben sich durch die Zusatzverteilung keine Schwierigkeiten in den Randbedingungen, während im allgemeinen Fall die Zusatzquellen Normalgeschwindigkeiten auf der Achse induzieren. Die Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung wird mit einigen verfügbaren Parametern angesetzt, in die Integralgleichung eingeführt und die Erfüllung der Integralgleichung in einigen besonders wichtigen Punkten gefordert. Daraus ergibt sich die Bestimmung der Parameter und im weiteren Verlauf die Lösung. Diese zeigt die typische Geschwindigkeitsverteilung mit Verdichtungsstoß richtiger Sprunghöhe. Bei wachsender Größe des lokalen Überschallgebietes beginnt der Widerstand in experimentell bekannter Weise plötzlich außerordentlich zu steigen. Die Übereinstimmung mit Versuchen von Göthert an einem 6% dicken NACA-Profil ist völlig zufriedenstellend.

Walter Wuest.

Bordoni, Piero Giorgio and Wolf Gross: Sound radiation from a finite cylinder. J. Math. Phys., Massachusetts **27**, 241—252 (1948).

Das Schallfeld eines Kreiszylinders von endlicher Länge mit schwingender Oberfläche wird durch eine Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen approximiert, wobei die Entwicklungskoeffizienten dadurch bestimmt werden, daß die Randbedingung $\partial\varphi/\partial n = u_n$ (= auf der Oberfläche des Zylinders vorgegebene Normalschnelle) „im Mittel“ möglichst gut approximiert wird, d. h. daß man $\int \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} - u_n \right|^2 dS$, erstreckt über die Oberfläche, zum Minimum macht. Diese Bedingung liefert ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten. — Für den Fall, daß nur eine Grundfläche des Zylinders kolbenartig schwingt und die Höhe des Zylinders gleich dem Radius a ist, sind in dieser Weise numerisch die Richtcharakteristiken berechnet und mit denen einer Kugel von gleichem Volumen und gleichem Schallfluß verglichen worden.

Arnold Schoch.

Chester, W.: The propagation of sound waves in an open-ended channel. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 11—33 (1950).

Dem von H. Levine und J. Schwinger in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. **39**, 213) vorgezeichneten Weg folgend, wird das entsprechende zweidimensionale Problem, nämlich das Schallfeld in einem von zwei parallelen, starren Halbebenen begrenzten Kanal behandelt. Die Quadraturen, durch die sich die Wiener-Hopf-Integralgleichung, auf welche das Problem führt, lösen läßt, können hier allgemein ausgeführt werden. Für den Betrag des Reflexionsfaktors am offenen Kanalende ergibt sich die überraschend einfache Beziehung $|R| = e^{-2\pi b/\lambda}$ (λ = Wellenlänge, $2b$ = Kanalbreite). Phase der Reflexion und Richtcharakteristik der Ausstrahlung sind numerisch durch Kurven wiedergegeben. *A. Schoch.*

Chester, W.: The propagation of a sound pulse in the presence of a semi-infinite, open-ended channel. II. Proc. R. Soc., London, A **203**, 33—42 (1950).

Untersucht wird die Welle, die in einem von zwei parallelen, starren Halbebenen begrenzten Kanal entsteht, wenn entweder von außen oder von innen eine ebene Stoßwelle (kleiner Amplitude) auf die Kanalmündung fällt. Der zeitliche Verlauf der primären Stoßwelle wird durch ein Fourier-Integral dargestellt; die von der Mündung aufgenommene bzw. von ihr reflektierte Welle läßt sich dann ebenfalls durch ein Fourier-Integral darstellen mit Hilfe der vom Verf. früher veröffentlichten Lösung desselben Problems für periodische Wellen (s. vorsteh. Referat). Da das entstehende Fourier-Integral nicht ohne weiteres geschlossen auswertbar ist, wird nur das asymptotische Verhalten der sekundären Wellen für große Abstände von ihrer Front diskutiert; es ergibt sich eine Amplitudenabnahme wie $O(1/s)$ (s = Abstand von der Wellenfront). — Das Ergebnis wird benutzt zur Abschätzung des Fehlers einer früher vom gleichen Verf. durchgeführten Berech-

nung der in der reflektierten Welle enthaltenen Energie [Philos. Trans. R. Soc. London A 242, 527–556 (1950)].
Arnold Schoch.

Chochlov, R. V.: Über instationäre Prozesse in einem Wellenleiter. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 637–640 (1948) [Russisch].

Es wird die nicht stationäre Schwingung (Einschaltvorgang) in einem halbinendlichen akustischen zylindrischen Wellenleiter untersucht, wenn für $t = 0$ ein flacher Strahler bei $z = 0$ Schwingungen nach dem Gesetz $e^{i\omega t}$ auszuführen beginnt. Die Gleichung des Geschwindigkeitspotentials ist

$$\Delta_{\xi, \eta} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

wo ξ, η die Querschnittskordinaten, z die Koordinate längs der Achse, α die Dämpfung, c die Phasengeschwindigkeit im freien Raum bedeuten. Als Zusatzbedingungen gelten $(\partial \Phi / \partial n)_r = 0$ längs des Querschnittsumfanges Γ , und an der Oberfläche des Strahlers:

$$\partial \Phi / \partial z|_{z=0} = F(\xi, \eta) e^{i\omega t} \text{ für } t > 0, \quad = 0 \text{ für } t < 0.$$

Für den Beginn der Schwingungen gilt im ganzen Medium $\Phi_{t=0} = 0$ und $\partial \Phi / \partial t|_{t=0} = 0$. Die Lösung erfolgt in der Form

$$\Phi(\xi, \eta, z, t) = e^{-\alpha^2 c^2 t} \sum_m \psi_m(z, t) T_m(\xi, \eta),$$

wo $T_m(\xi, \eta)$ die normierten Eigenfunktionen des Querschnitts sind, entsprechend

$$\Delta_{\xi, \eta} T_m(\xi, \eta) + \lambda_m^2 T_m(\xi, \eta) = 0, \quad \partial T_m / \partial \eta|_{\Gamma} = 0$$

und

$$\psi_m(z, t) = -\frac{c f_m}{2\pi i} \int_{a-i\omega}^{a+i\omega} \frac{\exp(p t - c^{-1} z \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2})}{(p - i\chi) \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}} dp,$$

$$s_m^2 = \lambda_m^2 - \alpha^2 c^2, \quad f_m = \int_s F(\xi, \eta) T_m(\xi, \eta) d\sigma, \quad i\chi = i\omega + \alpha c^2.$$

ψ_m kann durch 2 Lommelsche Funktionen [vgl. P. J. Kusnezov, Angewandte Mathematik und Mechanik, 2. Aufl. 1947 (russisch); G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, 2. ed., Cambridge 1944] zweier unabhängiger Variabler dargestellt werden, und es kann abgeleitet

werden, daß $\frac{\partial}{\partial z} (e^{-\alpha^2 c^2 t} \psi(z, t))_{t=z/c} = f_m \cdot e^{-\alpha c z}$ ist, d. h. daß an der Front alle Wellen vom

Index m in gleicher Weise verkleinert erscheinen, also dasselbe Verteilungsbild auftritt, das zur Zeit $t = 0$ auf dem Strahler $z = 0$ vorhanden ist. — Die Geschwindigkeit längs der z -Achse folgt als

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial z} = \frac{f_m}{2\pi i} \int_{a-i\omega}^{a+i\omega} \frac{\exp(p t - c^{-1} z \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2})}{p - i\chi} dp.$$

Die Sattelpunkte dieses Integrals für reelles s_m liegen bei

$$t - d\gamma/dp = 0, \quad p_{1,2} = \pm i\theta s c / \sqrt{\theta^2 - 1} = \pm i y_0$$

mit $\gamma = \sqrt{(p/c)^2 + s^2}$, $\theta = c t / z$, $p = x + i y$, mit dem ein Näherungswert des Integrals bestimmt wird. In der Nähe der Wellenfront $\theta = 1$, $p_{1,2} \rightarrow \infty$ kann man durch eine Reihen-

entwicklung des Exponenten nach $1/p$ die Näherung $\frac{\partial \psi_m}{\partial z} \approx f_m J_0 \left(s c \sqrt{2 \frac{z}{c} \left(t - \frac{z}{c} \right)} \right)$ ge-

winnen. Es läuft ein stoßartiger Impuls mit der Wellenfront, der um so rascher verschwindet, je größer z/c , d. h. die Entfernung von der Quelle ist. Da die Sattelpunkte bei $dp/d\gamma = z/t$ liegen ($dp/d\gamma$ Gruppengeschwindigkeit), treffen in der Hauptsache am Ort z zur Zeit t Wellen derjenigen harmonischen Komponenten der Strahlungsquelle ein, deren Gruppengeschwindigkeit gleich z/t ist. Für θ nur wenig größer als 1, dicht hinter der Wellenfront, sind die Wellenamplituden sehr klein, ihre Frequenzen sehr hoch. Bei wachsenden θ , bei größerem Abstand von der Wellenfront wachsen die Amplituden langsam, und die Frequenz nimmt ab. Bei einem bestimmten Werte $\theta = \theta_s$ überschreitet der Verzweigungspunkt p_1 den Pol des Integrals $p = i\chi$. Es ist nunmehr das Residuum dieses Pols zu berücksichtigen, und die Amplitude erreicht jetzt schnell den stationären Wert. Wie schon von Brillouin gefunden [Ann. Phys., Leipzig 44, Nr. 10 (1914)] definiert θ_s den Zeitpunkt des Eintreffens des Signals, dessen Geschwindigkeit c/θ_s beträgt. — Über den stationären Zustand lagern sich in diesem Stadium noch die Einschaltvorgänge, herrührend von $p_{1,2}$, so daß die Wellenamplituden auch größer werden können, als dem stationären Zustand entspricht. Der Zusammenhang von Signalgeschwindigkeit und der

Schwingungsfrequenz des Strahlers ergibt sich als

$$V_s = c \sqrt{1 - s^2 c^2 / \omega^2} \quad \text{für } \omega > s c, \quad V_s = c \sqrt{1 - \omega^2 / s^2 c^2} \quad \text{für } \omega < s c,$$

wenn keine Dämpfung auftritt. Mit Dämpfung geht V_s für $\omega = s c$ nicht auf Null, sondern durchläuft ein Minimum. Der Fall $\omega < s c$ entspricht Wellentypen, die sich im Hohlleiter nicht ausbreiten, bei denen die Gruppengeschwindigkeit keinen Sinn hat. V_s gibt das Eintreten des stationären Zustands in diesem Fall an. Für $\omega > s c$ (sich ausbreitende Wellen) ist V_s bei geringer Dämpfung nur wenig von der Gruppengeschwindigkeit verschieden. Ohne Dämpfung fällt sie mit ihr zusammen.

W. O. Schumann.

Eckart, Carl: Vortices and streams caused by sound waves. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 68—76 (1948).

Zur Erklärung des „Schallwinds“, d. h. der Gleichströmungen, die in Schallfeldern hoher Intensität entstehen, leitet Verf. aus den Eulerschen und Navier-Stokeschen Grundgleichungen der Hydrodynamik Differentialgleichungen für die Schallvorgänge in höherer Näherung ab (im Anschluß an ältere Rechnungen von Rayleigh zum selben Gegenstand). Dabei zeigt sich, daß in reibungsfreien Medien keine Gleichströmungen als Folge einer Schallwelle entstehen können und zu deren Erklärung die Viskosität berücksichtigt werden muß. Ist die Schallschnelle

$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1$, als Summe sukzessiver Näherungen, dann genügt \vec{u}_0 der bekannten Wellengleichung für Schallwellen in viskosem Medium. Die Differentialgleichungen für \vec{u}_1 bringt Verf. auf eine übersichtliche Form durch Einführung von $D_1 = \text{div } \vec{u}_1$ und $\vec{R}_1 = \text{rot } \vec{u}_1$, wobei sich für \vec{R}_1 eine Diffusionsgleichung der Form

$$\partial \vec{R}_1 / \partial t - \nu_0 \Delta \vec{R}_1 = -\vec{q} \quad (\nu_0 = \text{Koeffizient der kinematischen Zähigkeit})$$

ergibt, deren rechte Seite sich aus der ersten Näherung bestimmt und daher bekannt ist. Ist die erste Näherung bezüglich der Zeitabhängigkeit eine harmonische Schwingung, dann erweist sich \vec{q} überdies als zeitlich konstant, und die stationäre Wirbelströmung ist bestimmt durch die Differentialgleichung $\nu_0 \Delta \vec{R}_1 = \vec{q}$. Dieses stationäre Diffusionsproblem für \vec{R}_1 löst Verf. für eine Flüssigkeit, die in ein zylindrisches Gefäß mit Radius r_0 eingeschlossen ist und von einem zylindrischen Schallwellenbündel vom Radius $r_1 < r_0$ achsial durchsetzt wird. Die Geschwindigkeitsverteilung der Gleichströmung wird angegeben. Besonders bemerkenswert ist, daß die Geschwindigkeit proportional zu einer Größe $b = \frac{4}{3} + \frac{\text{Volumviskosität}}{\text{Schubviskosität}}$ ist, womit sich eine Möglichkeit zur Bestimmung der Volumviskosität, einer erst in neuerer Zeit stärker beachteten zweiten Zähigkeitskonstanten, bietet.

Arnold Schoch.

Braumann, Hans: Mediumrückwirkung und akustische Strahlungsdämpfung für ein kreisförmiges Plättchen. Z. Naturforsch., Tübingen 3a, 340—350 (1948).

In der aus dem Greenschen Satz folgenden quellenmäßigen Darstellung des Geschwindigkeitspotentials

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint \psi(\xi = +0, \eta, \zeta) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\eta d\zeta,$$

wo das Integral über die Fläche der Kreisscheibe (in der Ebene $x = 0$) zu erstrecken und $\rho = (x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}$ ist, führt Verf. einen Näherungsansatz für $\psi(+0, \eta, \zeta)$ ein, den er so gewinnt: In dem Problem angepaßten rotationselliptischen Koordinaten σ, τ (die hier abweichend vom Üblichen so definiert sind, daß $\sigma = 1$ die Kreisscheibe darstellt) wird ψ in der separierten Form $\psi = S(\sigma) T(\tau)$ angesetzt. Für $S(\sigma)$ und $T(\tau)$ werden Potenzreihenansätze gemacht und deren Koeffizienten so bestimmt, daß den aus der Wellengleichung durch Separation folgenden zugehörigen Differentialgleichungen genügt wird, und die Randbedingung ($\partial\psi/\partial x =$ einem gegebenen Wert auf der Scheibe $\sigma = 1$) mit möglichst kleinem Fehler er-

füllt wird. Man erhält so für die Reaktionskraft des Mediums gerade die ersten Terme einer Reihenentwicklung nach dem Verhältnis Scheibenradius/Wellenlänge.
Arnold Schoch.

Riabouchinsky, D. P.: Hydraulic analogy of the motion and resistance of a compressible fluid as an aid to aeronautical research. *Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 61—88 (1949).*

Terracini, Cesare: Filtrazione dell'acqua al di sotto di uno sbarramento fluviale fondato su terreno permeabile. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 139—148 (1950).*

Schleusner, A.: On a problem in the theory of earth pressure. *Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 248—255 (1949).*

Elektrodynamik:

Baudoux, Pierre: Note sur les courants superficiels. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 340—347 (1950).*

Für einen Oberflächenstrom wird ein Vektor \mathbf{j} der Belegungsdichte durch die Gleichung $\mathbf{j} = q_F \times \mathbf{v}$ definiert. Hierin bedeutet \mathbf{v} die vektorielle Geschwindigkeit, mit der sich die elektrische Ladungsdichte $q_F = |\mathbf{q}_F|$ in der Oberfläche verschiebt, während der Vektor \mathbf{q}_F die Richtung der Flächennormale \mathbf{n} hat. Das zwischen A und B genommene Linienintegral von $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$ gibt dann die Größe des Oberflächenstroms zwischen diesen Punkten an. Die Kontinuitätsgleichung läßt sich im vorliegenden Falle in die Form der Gleichung $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{j} + \partial q_F / \partial t = 0$ bringen. Ferner ist \mathbf{j} gleich dem Sprung der vektoriell genommenen Komponenten von $\mathbf{\xi}$ in der Tangentialebene zur Oberfläche beim Durchgang durch diese Fläche. Schließlich wird noch gezeigt, daß sich in einem magnetisierten Körper die magnetische Polarisierung ebenfalls auf einfache Weise durch den Vektor \mathbf{j} darstellen läßt.

Herbert Buchholz.

Estrin, Gerald: The effective permeability of an array of thin conducting disks. *J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 667—670 (1950).*

Eine dreidimensionale Anordnung von dünnen, leitenden Scheiben hat neuerdings besondere Anwendung gefunden als ein künstliches, brechendes Medium für UKW-Wellen. — Im ersten Teil der Arbeit wird die stationäre, zirkuläre Strömung berechnet, die in einer dünnen, leitenden Kreisscheibe durch ein dazu senkrecht stehendes, pulsierendes Magnetfeld induziert wird, wobei die Annahme gemacht wird, daß die Wellenlänge groß ist gegenüber dem Scheibendurchmesser. Anfangs wird die Kreisscheibe als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßt. Das innere und äußere Feld läßt sich in diesem Falle durch ein Hilfspotential darstellen, für das unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung und der Grenzbedingungen die lösenden Reihenentwicklungen aufgestellt werden. Zu den Grenzbedingungen zählt u. a. die Forderung, daß die Ausdrücke für die Feldvektoren überall beschränkt sind und daß in großer Entfernung das Magnetfeld der induzierten Strömung verschwinden muß. Geht man danach zum Grenzfall der unendlich dünnen, vollkommen leitenden Kreisscheibe über, so ergibt sich für die induzierte Strömung in azimutaler Richtung der einfache Ausdruck $i_\varphi = -4 H_a \cdot r / \pi (a^2 - r^2)^{1/2}$, worin H_a das äußere Feld, a der Radius der Kreisscheibe und $r \leq a$ die Entfernung des in der Scheibenebene liegenden Aufpunktes vom Mittelpunkt bedeutet. — Hinsichtlich der felderzeugenden Wirkung verhält sich die Strömung in der Scheibe wie ein magnetischer Dipol mit dem Moment $m = -(8/3) a^3 H_a$. Ist die Zahl N der Scheiben in der dreidimensionalen Anordnung genügend klein, um die Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung zu rechtfertigen, so ist die Magnetisierung des zusammengesetzten Mediums $\mathfrak{M} = N m$, seine relative Permeabilität $k_m = 1 - 8 N a^3/3$. Das Medium verhält sich also diamagnetisch. Da bei einem parallel zu den Scheiben einfallenden Magnetfeld keinerlei Ströme induziert werden, so ist in diesem Falle die relative scheinbare Permeabilität gleich 1. Das Medium ist also magnetisch anisotrop mit $\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$. Die elektrische Anisotropie des besprochenen Scheibengitters ist aus älteren Untersuchungen her bekannt. Die Wirkung eines derart zusammengesetzten Mediums auf eine schief auffallende elektromagnetische Welle läßt sich damit auch quantitativ bestimmen.

Herbert Buchholz.

Kelleher, K. S.: Relations concerning wave fronts and reflectors. *J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 573—576 (1950).*

Beim Arbeiten mit UKW-Antennen ist es oft erwünscht, die Charakteristiken

ihrer Wellenfläche zu kennen. Man kann sich darüber in einigen Fällen Kenntnis verschaffen mittels der Methoden der geometrischen Optik, indem man die Bahnen einiger besonderer Strahlen genauer verfolgt. In der vorliegenden Arbeit wird das folgende Problem gelöst: Von den drei Flächen, 1. der Fläche der einfallenden Welle, 2. der Fläche der reflektierten Welle und 3. der Oberfläche des Reflektors, sind zwei gegeben. Es ist der Verlauf der dritten zu finden. Ausführlicher werden z. B. behandelt die beiden Fälle: Es sind 1. und 3. oder 1. und 2. gegeben. Ferner wird u. a. die Aufgabe durchgerechnet, für eine gegebene Wellenfläche die Abweichung von einer ebenen Fläche zu ermitteln. Als letztes Beispiel wird die interessante Aufgabe gelöst, einen Reflektor zu finden, der eine willkürliche Wellenfläche bei einer einfallenden Welle in eine ebene Wellenfläche umwandelt. — Die vom Verf. benutzte Vektor-Symbolik für die Angabe der Wellenfläche geht auf W. Blaschke zurück.

Herbert Buchholz.

Keller, Joseph B.: Reflection and transmission of electromagnetic waves by thin curved shells. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 896—901 (1950).

Es wird die Streuung untersucht, die ein beliebiges elektromagnetisches Feld an einem leitenden oder nichtleitenden Hindernis erfährt. Die Differentialgleichungen und die Grenzbedingungen, die das Feld befriedigen muß, werden in ein Paar inhomogener linearer Integro-Differentialgleichungen für \mathcal{E} und \mathcal{H} transformiert. Ist das Hindernis eine dünne Schale mit der konstanten Dicke h , so läßt sich die Lösung dieser Gleichungen in Form einer Potenzreihe in h angeben. Der niedrigste Term in der Entwicklung stellt die einfallende Welle dar. Das nächst höhere Entwicklungsglied hat die Form eines Oberflächenintegrals. Dieses Integral wird angenähert nach der Methode der stationären Phase ausgewertet. Die physikalische Aussage der Lösung wird im einzelnen besprochen, und es zeigt sich dabei, daß die gewonnenen Ergebnisse in befriedigender Weise vor allem auch mit den auf anderen Wegen gefundenen Resultaten übereinstimmen.

Herbert Buchholz.

Severin, Hans: Der Schlitzstrahler, ein magnetischer Dipol für Zentimeterwellen. Z. Phys., Berlin **128**, 108—119 (1950).

An Hand einfacher physikalischer Überlegungen wird verständlich gemacht, daß die zur Abstrahlung von Zentimeterwellen gebräuchlichen Schlitzantennen dem Charakter der von ihr ausgesandten Strahlung nach sich wie magnetische Dipole verhalten. Ihre Wirkungsweise läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an einer kleinen Öffnung in einem vollkommen leitenden Schirm verstehen. Die auf Grund dieser Vorstellung entwickelten Rechnungen zeigen mit den Messungen eine gute Übereinstimmung, solange die Schlitzlänge kleiner als $\lambda/3$ ist.

Herbert Buchholz.

Rhodes, D. R.: Theory of axially slitted circular and elliptic cylinder antennas. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 1181—1188 (1950).

Die Arbeit untersucht die Beugung, die eine ebene, einfarbige elektromagnetische Welle beliebiger Richtung und Polarisation an einem unbegrenzt langen, vollkommen leitenden Zylinder von kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt erfährt, wenn dessen Mantelfläche parallel zur Zylinderachse an einer oder zwei Stellen aufgeschlitzt ist. Was die Anordnung der Schlitz betrifft, so werden nur die beiden Fälle betrachtet, daß entweder nur ein Schlitz vorhanden ist, der von der Achse aus unter dem Winkel $2\varphi_0$ erscheint, oder aber, daß zwei gleich große, einander gegenüberliegende Schlitz mit diesem Öffnungswinkel vorgesehen sind. — Bei beliebiger Polarisation der einfallenden Welle müssen im allgemeinen für die Beschreibung des Wellenfeldes sowohl der Hertzsche als auch der Fitzgerald-Vektor benutzt werden. Zerlegt man jedoch die einfallende Welle in zwei Komponenten, von denen die eine in der Einfallsebene, die andere dazu senkrecht steht, so lassen sich die Beugungsfelder beider Wellenanteile unabhängig voneinander durch je einen dieser beiden Hilfsvektoren beschreiben. Im vorliegenden Falle haben beide Vektoren nur eine einzige von Null verschiedene Komponente in Richtung der Zylinderachse, die der Wellengleichung genügen muß. — Es ist danach nicht schwierig, einen formalen Lösungsansatz für das Innere und Äußere des Zylinders aufzustellen. Die Berücksichtigung der Grenzbedingungen führt schließlich auf ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Verf. löst es näherungsweise nach dem von

Sommerfeld im Band 6 seiner Vorlesungen beschriebenen Verfahren auf, wobei er sich im wesentlichen auf den Fall sehr schmaler Schlitzte mit kleinen Werten von φ_0 beschränkt. Diese Annahme verwässert freilich die physikalische Aussage der Lösung stark. Sie läßt aber doch so viel erkennen, daß bei gewissen kritischen Einfallswinkeln im Innern des Zylinders TE- oder TM-Wellen größerer Amplitude durch eine Art Resonanzeffekt auftreten können. — Zum Schluß wird dasselbe Verfahren auf geschlitzte Zylinder von elliptischem Querschnitt ausgedehnt.

Herbert Buchholz.

Ledinegg, E. und P. Urban: Zur Theorie der Koppelschwingungen elektromagnetischer Hohlräume. *Acta phys. Austriaca* 2, 198—213 (1948).

Verff. befassen sich mit zwei Hohlräumen, welche durch einen dritten Hohlraum elektromagnetisch gekoppelt sind. Alle Hohlräume werden verlustfrei angenommen. Im ungestörten Zustand (Wechselwirkung = Null) sollen die Resonatoren mindestens eine gemeinsame Eigenfrequenz aufweisen. Es zeigt sich, daß die Koppelfrequenzen einer Säkulardeterminante genügen, deren Glieder Energieterme darstellen, welche durch die einzelnen Elemente des Hohlraumresonatorsystems bestimmt sind. Diese lassen sich berechnen. Die allgemeinen Überlegungen werden am Beispiel zweier konzentrischer Koaxialleitungen mit koaxialer Koppelleitung illustriert. Zum Schluß werden die Koppelfrequenzen zweier quasi-stationärer Schwingungskreise berechnet, welche mittels eines Zwischenkreises gekoppelt sind.

Max Strutt.

Ruch, Ernst: Der Einfluß einer Blende in Rohren auf das Feld einer einfallenden elektromagnetischen Welle. *Ann. Phys., Leipzig*, VI. F. 7, 248—272 (1950).

Die Arbeit greift erneut das in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten behandelte Problem an, nach welchen Gesetzen eine durch einen Hohlleiter laufende Welle an einer senkrecht zur Rohrwandung angebrachten ebenen Blende reflektiert und gebrochen wird. Die hier vorgetragene Lösung stützt sich auf den Satz, daß auch die allgemeinste Hohlleiterwelle sich stets durch Überlagerung endlich oder unendlich vieler Eigenwellen des Rohrs vom TE- oder TM-Wellentypus muß darstellen lassen. Wird also die Anregung des Vorganges durch eine einzelne auf die Blende zulaufende Eigenwelle des Rohrs bewirkt, so wird sich sowohl der reflektierte als auch der hindurchgelassene Wellenzug hinter der Blende im allgemeinsten Falle aus unendlich vielen Eigenwellen des Rohrs zusammensetzen, die sowohl dem TE- als auch dem TM-Wellentypus angehören können. Selbstverständlich sind zunächst die Amplituden dieser unendlich vielen Teilwellen unbekannt. Für diese unbekannten Amplituden läßt sich aber aus den Grenzbedingungen, die für die Tangentialkomponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} in der Blendenebene gelten, ein System von demgemäß ebenfalls unendlich vielen Gleichungen aufstellen. Die Schwierigkeit dieses Lösungsverfahrens besteht in der Hauptsache in der Auflösung dieses unendlichen Gleichungssystems. Im vorliegenden Falle gelingt es dem Verf., zu diesem Gleichungssystem die reziproke Matrix zu konstruieren und damit die Lösung explizite anzugeben. — Für den Fall eines rechteckigen Hohlleiters und einer schlitzförmigen Blende wird eine näherungsweise numerische Rechnung durchgeführt, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Anregung durch eine TE-Welle erfolgt.

Herbert Buchholz.

Schorr, Marvin G. and Fred J. Beck jr.: Electromagnetic field of the conical horn. *J. appl. Phys., Lancaster Pa.* 21, 795—801 (1950).

Es wird in der Arbeit die radial nach außen erfolgende Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im hohlen Innern eines unendlich langen, kegelförmigen Horns mit vollkommen leitender Wandung untersucht. Als Bezugssystem dient ein Kugelkoordinatensystem, dessen Pol in der Kegelspitze liegt und dessen z -Achse mit der Kegelachse zusammenfällt. Die Beziehungen für die Feldkomponenten der beiden Wellentypen werden sogleich für den allgemeinsten Fall angegeben, in dem die Konfiguration der Wellen auch von der Koordinate φ abhängt. Die Abhängigkeit der Wellenamplituden von einer bestimmten Art der Erregung der

Wellen wird rechnerisch nicht zu erfassen versucht. Statt dessen wird eine mehr auf physikalischen Erwägungen beruhende Abschätzung darüber gebracht, wie sich die Speisung des Horns durch einen in der Kegelspitze einmündenden zylindrischen Hohlleiter mit einer TE_{11} -Welle auf das Zustandekommen der verschiedenen Wellentypen im Horn auswirken würde. — Im 2. Teil der Arbeit werden die Beziehungen für die Abstrahlung der elektromagnetischen Wellen von der Mündung eines endlich langen Kegelhorns aufgestellt, wie sie sich auf Grund darüber bestehender allgemeiner Formeln zunächst in Gestalt von Doppelintegralen ergeben. Wie üblich wird dabei angenommen, daß die Feldverteilung in der gedachten, das Horn gegen den Außenraum abgrenzenden Kugelkappe der vordem berechneten idealen Feldverteilung im Innern eines unendlich langen Horns entspricht. Die auftretenden Integrale werden für Horne von kleinem Öffnungswinkel mit mäßiger Länge in Reihen entwickelt und die Ergebnisse mit den Experimenten verglichen.

Herbert Buchholz.

Graffi, Dario: Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un tubo curvo. Mem. Acad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. S. 5, 23—26 (1949).

Verf. untersucht allgemein die Frage, welche Art elektromagnetischer Wellen sich in einem zu einem Torus zusammengebogenen Hohlleiter ausbreiten können. Bezeichnen r, θ und y die Zylinderkoordinaten mit y als Rotationsachse, so wird in leichter Verallgemeinerung gegenüber älteren Arbeiten angenommen, daß die Querschnittskanten des Hohlleiters in der Mantelebene (y, r) zwischen den Werten $r = a$ und $r = b > a$ gemäß den Gleichungen $y = \alpha(r)$ und $y = \beta(r)$ verlaufen. Der Querschnitt hat also nicht einfach rechteckige Gestalt. — Aus den Differentialgleichungen, die nach der Theorie Maxwells zwischen den sechs Feldkomponenten bestehen, läßt sich dann z. B. nachweisen, daß in einem solchen Hohlleiter eine Welle des magnetischen Typus, d. h. eine Welle, für die im ganzen Hohlleiter durchweg $E_\theta = 0$ wäre, nicht für sich allein bestehen kann.

Herbert Buchholz.

Rinow, Willi: Über eine Anwendung der Störungsrechnung auf das Problem der gekrümmten Leitung. Math. Nachr., Berlin 3, 176—192 (1950).

Die Arbeit behandelt die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in kreisbogenförmig gekrümmten Leitungen, deren Querschnitt beliebige, aber im übrigen gleichbleibende Gestalt hat. Es wird die Methode der Störungsrechnung angewendet mit dem reziproken Krümmungsradius $1/R$ als Störungsparameter. Die Lösung besteht also letzten Endes in einer Reihenentwicklung nach zunehmenden Potenzen von $1/R$. Durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems wird erreicht, daß der Störungsparameter in die Koeffizienten der Wellengleichung quadratisch und in die Randbedingungen linear eingeht. Der nach Potenzen von $1/R$ fortschreitende Lösungsansatz führt auf ein rekursives System von inhomogenen, linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das sich sukzessive auflösen läßt. Das Feld in der gekrümmten Leitung stellt sich als eine unendliche Folge von Eigenfeldern mit ihren zugehörigen Eigenwerten dar. Besondere Beachtung verlangt der Fall der Entartung. — Im zweiten Abschnitt der Arbeit wird die Aufgabe des Zusammenschlusses zweier gerader Leitungen durch ein gekrümmtes Leitungstück betrachtet, wobei wiederum die Querschnitte aller Leitungsteile beliebig, aber gleichartig gestaltet sind. Das allgemeine Feld in einer solchen Leitung läßt sich durch Superposition der Eigenfelder darstellen. Hinsichtlich der Anregung wird angenommen, daß an dem einen Ende der Leitung eine Welle von vorgegebenem Typus hineinläuft, das andere Ende aber über ihren Wellenwiderstand reflexionsfrei abgeschlossen ist. Die Amplituden der Eigenfelder ergeben sich unter dieser Annahme und aus den Stetigkeitsforderungen an den Übergangsstellen aus einem System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Auch dieses Gleichungssystem kann durch einen Potenzreihenansatz nach $1/R$ sukzessive gelöst werden. Auf diese Weise würde dann sogar das Reflexionsverhältnis berechnet werden können. Für den einfachsten Fall der Grundwelle einer Doppelleitung werden die ersten Berechnungsschritte explizite durchgeführt. — Der dritte und letzte Abschnitt bringt die Anwendung der allgemeinen Theorie auf eine wie oben zusammengesetzte konzentrische Leitung. Die numerische Auswertung des Reflexionsverhältnisses, das in der Arbeit nicht gebracht wird, führt auf einen wider Erwarten kleinen Wert von 10^{-3} , wenn das Verhältnis des Außenradius zum Krümmungsradius kleiner als $1/6$ bleibt. — Konvergenzbetrachtungen werden an den aufgestellten Reihen nicht angestellt.

Herbert Buchholz.

Kuznecov, P. I.: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs zweier paralleler einfacher, geradliniger Leiter. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva 12, 141—148 (1948) [Russisch].

Tomiyasu, K.: Unbalanced terminations on a shielded-pair line. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 21, 552—556 (1950).

Wenn ein Lecher-System, sei es abgeschirmt oder nicht, an seinem einen Ende unsymmetrisch belastet ist, so treten in ihm im allgemeinen sowohl Gleichtakt- als auch Gegentaktwellen auf. Bei jedem dieser beiden Wellentypen kann außerdem in der Regel zwischen einer einfallenden und einer reflektierten Welle unterschieden werden. Die Arbeit zeigt, wie z. B. aus den Messungen des Spannungsverhältnisses der stehenden Wellen die Reflexionskoeffizienten der Gleich- und Gegentaktwellen auf den beiden Leitungssträngen berechnet werden können. *Herbert Buchholz.*

Goubau, Georg: Surface waves and their application to transmission lines. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 21, 1119—1128 (1950).

Die Arbeit behandelt zwei besondere Fälle der in radialer Richtung nichtstrahlenden Oberflächenwellen, wie sie sich bei geeigneter Erregung längs eines einzelnen unbegrenzt langen zylindrischen Leiters ausbreiten können. Der erste Fall ist identisch mit der bekannten Sommerfeldschen Drahtwelle, deren Gesetzmäßigkeiten hier noch einmal aufgestellt und nach besonderen Gesichtspunkten diskutiert werden, um damit auf den zweiten Fall vorzubereiten. Von den an sich bekannten Tatsachen, die für solche Drahtwellen gelten, werden hervorgehoben: Für ihre Existenz ist erforderlich, daß der Leiter eine nur endliche Leitfähigkeit κ besitzt, da sich für $\kappa \rightarrow \infty$ die von der Welle durch jeden endlichen, den Draht umgebenden Querschnitt hindurchbeförderte Leistung bei endlicher Sendeleistung dem Werte Null nähert. Da ferner das elektromagnetische Feld der Welle in radialer Richtung nur relativ langsam an Stärke abnimmt, so ist es sehr schwer, solche Wellen an zylindrischen Leitern zu erzeugen. Für ihre praktische Anwendung spricht andererseits die nur geringe Dämpfung, die diese Wellen bei der Fortpflanzung längs des Drahtes erfahren. — Das Aufbringen der Wellen würde erleichtert werden, wenn es gelänge, die Energiedichte des Wellenfeldes in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes zu vergrößern. Um diese Möglichkeit nachzuprüfen, untersucht Verf. im zweiten Falle die Ausbreitung einer Welle längs eines einzelnen zylindrischen Leiters, wenn er z. B. außerdem noch einen dielektrischen Mantel trägt. Hierin liegt im wesentlichen die Erweiterung gegenüber der Sommerfeldschen Arbeit. Es zeigt sich, daß durch diese Maßnahme in der Tat die seitliche Ausbreitung des Feldes wirksam verändert werden kann. Schließlich wird noch eine Beziehung für die Dämpfung aufgestellt, die die Wellen beim Entlanggleiten an derart behandelten Drähten erfahren. Die durchgeführten Experimente haben die theoretischen Untersuchungen in befriedigender Weise bestätigt. *Herbert Buchholz.*

Pignedoli, Antonio: Sul problema delle aurore polari. Moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico e in prossimità di uno dei poli, essendo l'altro polo molto lontano. *Atti Sem. mat. fis. Univ.*, Modena 1, 17—49 (1947).

Verf. befaßt sich mit der Bewegung eines elektrisch geladenen Partikels in der Umgebung eines Poles eines magnetischen Dipols, wobei der andere Pol sehr weit entfernt ist. Er geht von den Bewegungsgleichungen aus und schreibt diese in der Lagrangeform an. Diese Bewegungsgleichungen werden in einer Reihe von Partikularfällen integriert. Es handelt sich darum, die Bewegungsstörung durch den zweiten Magnetpol angenähert zu bestimmen. Diese Bestimmung kann mit Hilfe von Quadraturen erfolgen. *Max Strutt.*

Zeuli, Tino: Condizioni per l'esistenza di un integrale analogo a quello delle aree nel problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettrico e in un campo magnetico qualsiasi sovrapposti. *Atti Sem. mat. fis. Univ.*, Modena 2, 20—36 (1948).

Verf. befaßt sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen ein Bewegungsintegral existiert bei der Bewegung eines elektrisch geladenen Partikels in einem elektrischen Felde, dem ein magnetisches Feld superponiert ist. Verf. bedient sich bei der Behandlung dieser Aufgabe der Vektorschreibweise. Er führt ein System von orthogonalen krummlinigen Koordinaten ein und schreibt die Bewegungsgleichungen in einem solchen System an. Er erhält in einigen Sonderfällen Lösungen der angestrebten Art. *Max Strutt.*

Ivanović, Dragiša M.: Über die Bewegungsgleichungen geladener Teilchen im elektromagnetischen Felde. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* 1, Nr. 3/4, 59—72 und deutsche Zusammenfassg. 72 (1949) [Serbisch].

Verf. gibt eine Übersicht der Grundgleichungen der Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Felde. Die Lösungen der Gleichungen in allgemeinen und in speziellen Fällen werden nur für Teilchen rein korpuskularer Natur gegeben. Um auf dieses Problem die Lagrangeschen Gleichungen anzuwenden, ist es notwendig, die Lagrange-Funktion zu finden, um aus ihr den Ausdruck für die Lorentz-Kraft zu bestimmen, und nicht umgekehrt. In dem Artikel wird die Lagrange-Funktion aus dem Ausdruck für die Energie abgeleitet, wobei auch das Variationsprinzip zur Anwendung kommt. Die Lagrangeschen Gleichungen werden aus dem Satz über die Erhaltung der Energie abgeleitet, unter Anwendung des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen. Der Operator für die Lorentz-Kraft wird gewöhnlich durch skalare Operationen abgeleitet. Hier wird er durch Anwendung von vektoriellen Methoden allein bestimmt. (Autoreferat.)

Relativitätstheorie:

Straus, E. G.: Some results in Einstein's unified field theory. *Rev. modern Phys.*, New York 21, 414—420 (1949).

Der 1. Teil der Arbeit handelt von der Darstellung der Lösung der Gleichungen $g_{ik;i} = 0$, wo g_{ik} der Hermitesche Fundamentaltensor der neuen Einsteinschen Theorie ist, durch die Komponenten Γ_{ik}^i des Hermiteschen Affinzusammenhangs. — Der 2. Teil diskutiert kurz die strengere Bedingung $R^i{}_{kim} = 0$, die in dieser nicht-Riemannschen Geometrie nicht den ebenen Fall charakterisiert. Der 3. und 4. Teil sind dem Problem der Existenz regulärer Lösungen der Feldgleichungen gewidmet. Es scheint, als seien die Feldgleichungen allein noch nicht hinreichend einschränkend, um Lösungen ohne physikalische Bedeutung auszuschließen. Wenn sie aber ergänzt werden durch Bedingungen „im Großen“, so scheint die Forderung der Regularität die natürlichste zu sein. Ein wichtiges negatives Resultat lautet: Ein Massenpartikel kann nicht durch eine überall reguläre statische Lösung dargestellt werden. Ebenso gilt, daß keine nicht-triviale, statische und zentralsymmetrische Lösung existiert, die asymptotisch eben ist. *Otto Heckmann.*

Narlikar, V. V. and Ramji Tiwari: A particular case in Einstein's generalized theory of gravitation. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 868—869 (1949).

Es wird ein spezielles Hermitesches Feld g_{ij} als Lösung der Feldgleichungen der neuen Einsteinschen Gravitationstheorie angegeben, das in das isotrope Gravitationsfeld einer Punktmasse der alten Einsteinschen Gravitationstheorie ausartet, falls das elektromagnetische Feld ausgeschaltet wird, und das in das Feld einer homogenen monochromatischen Welle übergeht, wenn das Gravitationsfeld beseitigt wird. *Otto Heckmann.*

Moshinsky, Marcos: On the interactions of Birkhoff's gravitational field with the electromagnetic and pair fields. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 80, 514—519 (1950).

Im Rahmen der Birkhoffschen Gravitationstheorie wird die Wechselwirkung eines schwachen Schwerfeldes mit elektromagnetischen Feldern und mit Paarfeldern untersucht mittels geeignet gewählter Lagrangefunktionen. Insbesondere werden die elektromagnetischen Feldgleichungen im Äußeren einer kugelsymmetrischen Masse studiert. Das Schwerfeld wirkt dann auf Lichtstrahlen wie eine inhomogene Materieverteilung. Die Lichtablenkung ergibt den gleichen Wert wie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Analog wird ein Wasserstoff-Atom im Schwerfeld studiert. Die Rotverschiebung wird identisch mit derjenigen der allgemeinen Relativitätstheorie. *Otto Heckmann.*

Scherrer, W.: Über den Einfluß des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld. II. *Helvetica phys. Acta* 23, 547—555 (1950).

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 34, 275) wird ein erweitertes Beispiel durchgerechnet, das im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie das schon in der ersten Arbeit erläuterte Beispiel zeigt. *Günter Ludwig* (Berlin).

Milne, E. A.: Gravitation and magnetism. Monthly Not. astron. Soc., London 110, 266—274 (1950).

Mit den Methoden der „kinematischen Relativität“ wird gezeigt, daß ein Zusammenhang zwischen Gravitation und Magnetismus existieren sollte von dem Typus, den Blackett [Nature, London 169, 658 (1947)] aus empirischen Daten an Erde, Sonne und dem Fixstern 78 Virginis als wahrscheinlich ablas. Ein rotierendes System kann kein Dipolfeld haben. Die Herleitung setzt voraus, daß das rotierende System eine Fundamentalepartikel sei, nach Meinung des Verf. also ein Spiralnebel. Er vermutet, daß bei gegebenem mittlerer Dichte und gegebenem Gesamtdrehimpuls ein stark abgeplattetes System ein größeres magnetisches Moment habe als ein weniger abgeplattetes.

Otto Heckmann.

Varecollier, Henri: La théorie de la propagation ellipsoïdale et ses possibilités. Relativité, quanta, gravitation. Arch. Sci., Genève 2, 99—114, 237—314 (1949).

Ce papier constitue une présentation relativement didactique de la théorie de la propagation ellipsoïdale telle qu'elle a été développée par Le Roux, mais surtout par Dive et l'A. On sait que cette théorie repose essentiellement sur le postulat suivant pour les ondes élémentaires: „les ondes émises en milieu isotrope par un émetteur en mouvement uniforme sont ellipsoïdales, chaque ellipsoïde étant de révolution autour de la direction du mouvement, centré sur la position de l'émetteur à l'instant de l'émission et ayant pour foyer avant la position de l'émetteur synchrone de la réception.“ L'A. montre comment ce postulat peut être utilisé pour donner une interprétation des phénomènes relativistes, de certaines conditions quantiques et même de l'effet Blackett (magnétisme des masses neutres en rotation).

André Lichnerowicz.

Maravall Casesnoves, Dario: Eine neue Theorie der Lichtablenkung und Rotverschiebung im Gravitationsfeld. Euclides, Madrid 10, 203—207 (1950) [Spanisch].

Atomphysik.

Quantentheorie:

Bloch, I., M. H. Hull jr., A. A. Broyles, W. G. Bouricius, B. E. Freeman and G. Breit: Methods of calculation of radial wave functions and new tables of Coulomb functions. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 553—560 (1950).

Verff. haben ein Fundamentalsystem der Schrödinger-Gleichung für abstoßendes Coulomb-Potential in einem breiten Bereich des Energieparameters numerisch berechnet und tabuliert; die Tafeln sind bei G. Breit, Yale University, New Haven, Connecticut erhältlich und zur Anwendung auf Kernreaktionen bestimmt. — In der vorliegenden Arbeit wird eine kurze Einführung in den Gebrauch dieser Tabellen gegeben und über spezielle analytische und numerische Methoden berichtet, die vereinfachte Berechnungen auch nicht-coulombscher Wellenfunktionen gestatten.

H. Krupp.

Breit, G. and M. H. Hull jr.: Asymptotic expansion of the irregular Coulomb function. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 561—563 (1950).

Es wird ein Zusammenhang zwischen der singulären Coulombfunktion und den Besselfunktionen zweiter Art in Form einer asymptotischen Reihe angegeben, die nach Potenzen des Energieparameters fortschreitet.

H. Krupp.

Lippmann, B. A. and Julian Schwinger: Variational principles for scattering processes. I. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 79, 469—480 (1950).

Verfasser stellen ein Variationsprinzip für die Berechnung des durch $\Psi(\infty) = S \Psi(-\infty)$ definierten unitären Stoßoperators S auf. Da jedoch die Näherungen für S nicht unitär sind, führen sie einen hermiteschen „Reaktionsoperator“ K ein durch $S = (1 - K \cdot i/2)/(1 + K \cdot i/2)$ und geben für diesen ein Variationsprinzip an, wobei auch die Näherungen hermitesch bleiben. Nach Über-

gang zur zeitunabhängigen Theorie wird auch für den dabei auftretenden Operator sowie im Spezialfall der Streuung durch ein Zentralfeld für die Phasenverschiebung ein Variationsprinzip formuliert. Die Anwendung auf das Problem der Streuung langsamer Neutronen an gebundenen Protonen führt auf die Ergebnisse von Fermi und Breit.

Gerhard Höhler.

Lippmann, B. A.: Variational principles for scattering processes. II. Scattering of slow neutrons by para-hydrogen. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 79, 481—486 (1950).

Als weiteres Beispiel zur vorsteh. ref. Arbeit wird die Streuung langsamer Neutronen an Parawasserstoff bis zur numerischen Auswertung durchgerechnet und mit der Fermischen Näherung verglichen.

Gerhard Höhler.

Kato, Tosio: Variational methods in collision problems. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 475 (1950).

Verf. stellt Beziehungen zwischen den Variationsansätzen auf, die für das Problem der Streuung am Zentralfeld von Kohn, Huang, Hulthén und Schwinger aufgestellt worden sind.

Gerhard Höhler.

Feenberg, Eugene: Theory of scattering processes. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 664—669 (1948).

Heitler, W.: Bemerkung über eine Erweiterung der Bornschen Näherung für Stoßprobleme. Acta phys. Austriaca 1, 110—112 (1947).

Heitler, W. and S. T. Ma: On the use of canonical transformations for collision problems. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 40, 651—666 (1948).

Fedorov, F. I.: Zur Frage der Lösung der relativistischen Wellengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 813—814 (1949) [Russisch].

Die Gleichung $(H + U)\psi = 0$ wird unter Voraussetzung, daß die Lösungen von $H\psi_0 = 0$ bekannt seien, nach Art des Heaviside-Kalküls formal gelöst. Die Anwendung auf die Streuung von Licht an einem freien Elektron erläutert die Methode. Das Ergebnis stimmt mit dem von Klein-Nishina überein. *Fritz Bopp.*

Allard, Georges: Un nouveau type de perturbation. J. Phys. Radium 11, 646—652 (1950).

Verf. behandelt das Wasserstoffatom mit einer Diracgleichung, die zwei zusätzliche Kopplungsglieder enthält. Einmal den von Pauli (dies. Zbl. 28, 380) vorgeschlagenen Ausdruck; zum anderen einen pseudovektoriellen Term, der sich aus den Feldstärken und eichinvarianten Ableitungen bilden läßt. Die beiden dadurch eingeführten Konstanten werden so festgelegt, daß der Lamb-Retherford-effekt richtig wiedergegeben wird. Jedoch ergibt sich dann ein falscher Wert für das magnetische Moment des Elektrons.

Harry Lehmann.

• **Spring, K. H.:** Photons and electrons. (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co., Ltd.; New York: J. Wiley and Son, Inc. 1950. VII, 108 p. mit 38 Textabb. Geb. 7 s. 6 d. net.

In diesem Band einer Serie, die etwa der Sammlung Göschen entspricht, wird die Wechselwirkung von Strahlung und Materie behandelt. Die Darstellung beschränkt sich auf eine Diskussion der experimentellen Ergebnisse im Vergleich zu den Aussagen der Theorie, die ohne Ableitung angegeben werden. Nach einigen Ausführungen über die wichtigsten Grundbegriffe geht Verf. zunächst auf Photoeffekt und Comptoneffekt ein. Es folgen Bremsstrahlung und Cerenkovstrahlung, Paarerzeugung und -vernichtung und schließlich die Kaskadentheorie. Das Buch gibt eine gut verständliche Darstellung des behandelten Problemkreises.

Gerhard Höhler.

Hamilton, J.: The theory of radiation damping. Proc. phys. Soc. London **59**, 917—940 (1947).

Inhalt der Arbeit ist eine Untersuchung der in der Strahlungstheorie üblichen Störungsrechnung und der Rolle der Heitlerschen Theorie der Strahlungsdämpfung. Hierzu betrachtet Verf. die beiden typischen Fälle der Emission und der Streuung für ein System in einem endlichen Volumen, also mit diskreten Energieniveaus. Es wird unter gewissen Annahmen eine exakte, d. h. nicht auf Entwicklung nach der Kopplungskonstanten beruhende Behandlung durchgeführt, die der Transformation eines Systems gekoppelter Oszillatoren auf Normalschwingungen entspricht. Im Fall der Emission ergibt sich die bekannte Formel von Weißkopf-Wigner, sowie eine (ohne Renormierung) divergente Termverschiebung. Das Problem der Streuung führt zu Ausdrücken, die bei Vernachlässigung von Selbstenergieeffekten mit der Heitlerschen Integralgleichung übereinstimmen.

Harry Lehmann.

Canals, D.: Die Fluktuationen in der Intensität der doppeltgebrochenen Strahlen. Rev. Un. mat. Argentina **14**, 213—225 (1950) [Spanisch].

Quantum electrodynamics permits to study the fluctuations of the distribution of intensities in two rays emerging from a birefringent plate for any given number of incident photons. It leads for single photons to the elementary quantum theoretical description of the phenomenon, and for large photon numbers to the limit of the classical theory. The quantum theoretical part of the intensity fluctuations should be observable up to „intensities“ (photon number) corresponding to one thousand photons.
(Autoreferat.)

Luttinger, J. M.: A note on the magnetic moment of the electron. Phys. Rev., Lancaster Pa. II. **74**, 893—898 (1948).

Breit, G.: Erratum: Does the electron have an intrinsic magnetic moment? Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **73**, 1410—1411 (1948).

Eden, R. J.: The analytic behaviour of Heisenberg's S matrix. Proc. R. Soc. London, A **199**, 256—271 (1949).

Die S -Matrix wird untersucht für die Streuung eines Elementarteilchens an einem festen Zentrum mit angeregten inneren Zuständen. Sie erfährt an den Schwellenwerten der Energie für unelastische Streuung abrupte Änderungen. Es wird eine Methode vorgeschlagen, bei der diese als nichtanalytische Änderungen in den Matrixelementen als Funktionen der Gesamtenergie dargestellt werden, und einige Folgerungen davon untersucht. Es läßt sich zeigen, daß die Eigenwerte von S an den Schwellenwerten immer noch analytische Funktionen der Energie sein können. Mit Hilfe der üblichen quantenmechanischen Störungstheorie wird ein System dieses Typs mit Resonanzstreuung betrachtet und gezeigt, daß die nichtanalytischen Änderungen in den Matrixelementen nichtanalytischen Änderungen in der Unitaritätsbedingung von S entsprechen. Wenn das einfallende Teilchen ein Photon ist, sind die angeregten Zustände des Streuers notwendig instabil, und die Elemente der S -Matrix haben Singularitäten in der komplexen Energie-Ebene, die diesen instabilen Zuständen entsprechen. Diese singulären Punkte zeigen klar den Zusammenhang zwischen der Linienbreite für Resonanzstreuung und den Einstein-Koeffizienten für spontane Ausstrahlung. Es wird gezeigt, daß sich die relativen Intensitäten von Spektrallinien aus der S -Matrix für die Streuung von Licht an einem Atom berechnen lassen. (Zusammenfassung des Autors.)

Walter H. Wessel.

Darling, B. T.: The irreducible volume character of events. I. A theory of the elementary particles and of fundamental length. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 460—466 (1950).

Verf. verallgemeinert die Diracgleichung unter Einführung von neuen Konstanten der Dimension einer Länge, indem er sie durch die selbstadjungierte Diffe-

renzengleichung $(\gamma_\lambda \Delta_\lambda \nabla_\lambda + \kappa \nabla) \psi = 0$ ersetzt. Dabei ist

$$\Delta_\lambda \psi = [\psi(x_\lambda + \Delta x_\lambda) - \psi(x_\lambda - \Delta x_\lambda)] / 2 \Delta x_\lambda, \quad \Delta_\lambda \nabla \psi = [\psi(x_\lambda + \Delta x_\lambda) + \psi(x_\lambda - \Delta x_\lambda)] / 2 \\ \nabla \psi = \prod_{\beta=1}^4 \beta \nabla \psi, \quad \nabla_\lambda \psi = \prod_{\beta \neq \lambda} \beta \nabla \psi.$$

Um die verlorengegangene Lorentzinvarianz wiederherzustellen, mittelt Verf. über die vierdimensionale Drehgruppe. Die so erhaltene verallgemeinerte Diracgleichung läßt sich als partielle Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung schreiben:

$$\left\{ \frac{8 J_2(z)}{z^2} \sum_{\sigma} \gamma_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} + \kappa \frac{2 J_1(z)}{z} \right\} \psi = 0.$$

$z^2 = 4 \omega^2 \sum_p \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, ω = Differenzenschritt. Setzt man als Lösung ebene Wellen an

$\psi = \exp(i p_{\sigma} x_{\sigma} / \hbar)$, $\sum_{\sigma} p_{\sigma}^2 = -\mu^2 c^2$, so folgt die Existenz eines durch eine trans-

zendente Gleichung festgelegten Spektrums positiver und negativer Massen. Identifiziert man die dem Betrage nach kleinste mit dem Elektron, die 13. mit dem Proton, so folgt $\omega = 1,6 e^2 / m c^2$ und 218 m für die zweitkleinste Masse. Abschließend Anwendung auf neutrale Teilchen.

Gerhard Höhler.

Shanmugadhasan, S.: The Compton scattering by particles possessing charge and dipole moment. Proc. Cambridge phil. Soc. **45**, 411—428 (1949).

Eine einfache früher abgeleitete (dies. Zbl. **38**, 134) Wellengleichung für Teilchen mit Ladung und spinproportionalem Dipolmoment wird der Berechnung der Comptonstreuung zugrunde gelegt. Die Auswertung erfolgt auf zwei Weisen (für klassisches und quantisiertes elektromagnetisches Feld). Für wichtige Spezialfälle werden die Streuformeln ausgewertet. Die Ergebnisse hängen ebenso stark wie von Teilchendaten auch von der Gestalt der Wellengleichung ab. (Vergleich mit Klein-Nishina-Formel).

Fritz Bopp.

Schönberg, Mario: Quantum theory of the point electron. I. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **74**, 738—747 (1948).

Verf. versucht, eine divergenzfreie Quantenelektrodynamik zu formulieren. Das elektromagnetische Feld wird durch zwei unabhängige Vierervektoren beschrieben, deren Differenz die Wechselwirkung zwischen Elektron und Strahlung bestimmt. Das Differenzfeld ist kommutativ. Durch eine Vorschrift über das „Einfrieren“ von Freiheitsgraden des Feldes (deren Durchführbarkeit dem Ref. zweifelhaft erscheint) sollen Divergenzen vermieden werden.

Harry Lehmann.

Pirani, F. A. E. and A. Schild: On the quantization of Einstein's gravitational field equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **79**, 986—991 (1950).

Verff. führen die Quantelung des Gravitationsfeldes durch, in engem Anschluß an die von Weiß und Dirac gegebene elegante Formulierung der Quantentheorie eines Kontinuums, und unter Benutzung einer von Bergmann und Brunings ausgeführten Überlegung, welche die Formulierbarkeit der Vertauschungsrelationen unabhängig von der Metrik dartat. — Die Verff. kennen nicht die vor langen Jahren erschienene Arbeit von Rosenfeld, in der das Problem bereits in ähnlicher Weise gelöst wurde.

Pascual Jordan.

Kilmister, C. W.: Two-component wave equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 568 (1949).

Bau der Materie:

Lüders, Gerhart: Über den Einfluß elektrischer Felder auf die Lebensdauer des metastabilen Niveaus des Wasserstoffatoms. Z. Naturforsch., Tübingen **5a**, 608—611 (1950).

Berücksichtigt man die als „Lamb-shift“ bezeichnete Abweichung von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel, so ändert sich der Einfluß elektrischer Felder

auf die Lebensdauer des metastabilen Niveaus des Wasserstoffatoms wesentlich. Für Feldstärken zwischen $0,03 \text{ Vcm}^{-1}$ und 10 Vcm^{-1} erhält man auf diese Weise eine mehr als hundertfache Verlängerung der Lebensdauer. *Erwin Kreyßig.*

Ivanenko, D. und V. Rodičev: Der Einfluß des Kernfeldes auf die Bewegung der Elektronen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 801—804 (1950) [Russisch].

Der Einfluß kernnaher Kräfte auf die Wasserstoffterme wird untersucht. Termverschiebung infolge a) mesonischer Wechselwirkung: $\Delta E \approx -10^{-7} \text{ cm}^{-1}$, b) virtuelle p - n -Umwandlungen, protonenseitig: $\Delta E \approx +0,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$, neutronenseitig $-0,4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$. Alle Verschiebungen liegen außerhalb des Beobachtbaren. Akkumulierung bei schweren Kernen erscheint möglich (Isotopeneffekt). *Fritz Bopp.*

Ploquin, M. J.: Calcul quantique de la polarisation des molécules aromatiques perturbées. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. **17** (Polarisation de la matière, Paris, April 1949), 28—31 (1949).

Maslov, P. G.: Zur Bestimmung der inversen Matrizen der potentiellen Energie mehratomiger Moleküle (Determinantenmethode). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 819—822 (1949) [Russisch].

Elwert, Gerhard: Absorptionskoeffizient an der langwelligen Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums. Z. Naturforsch., Tübingen **3a**, 477—481 (1948).

Heineman, M.: Theory of drag in highly rarefied gases. Commun. appl. Math., New York **1**, 259—273 (1948).

Allgemeine Formeln für den Widerstand eines konvexen Körpers beliebiger Form bei freier Molekularströmung (mittlere freie Weglänge L groß im Vergleich zu den Körperabmessungen a) werden sowohl für spiegelnde als auch für diffuse Reflexion der Moleküle abgeleitet. Die Widerstandskoeffizienten werden in Abhängigkeit von der Machschen Zahl für folgende Sonderfälle berechnet und aufgetragen: Platte unter beliebigem Anstellwinkel, Kugel, senkrecht zur Achse angeblasener Zylinder, in Achsenrichtung angeblasener Kreiskegel und Ellipsoid. Im zweiten Teil der Arbeit wird der Versuch gemacht, Zusammenstöße der Moleküle untereinander zu berücksichtigen, um eine bessere Annäherung für kleinere Werte von L/a zu gewinnen. Numerische Ergebnisse wurden nur für die senkrecht angeblasene Platte bei hohen Machschen Zahlen erzielt. *Walter Wuest.*

Keller, Joseph B.: On the solution of the Boltzmann equation for rarefied gases. Commun. appl. Math., New York **1**, 275—285 (1948).

Die Boltzmannsche Integro-Differentialgleichung für die wahrscheinliche Anzahl von Molekülen in einem infinitesimalen Raumelement und in einem gewissen infinitesimalen Geschwindigkeitsbereich wird entsprechend dem Vorgang von Jaffé (1930), jedoch für allgemeinere Randbedingungen, dadurch gelöst, daß die Lösung in eine Reihe nach a/λ entwickelt wird, wobei a eine kennzeichnende makroskopische Länge des Problems und λ die mittlere freie Weglänge ist. Die erste Näherung entspricht der sogenannten „freien Molekularströmung“. Die Methode wird auf die Berechnung des Widerstandes eines bewegten Körpers und auf das Problem der freien Expansion ins Vakuum angewandt. *Walter Wuest.*

Curtiss, Charles F. and Joseph O. Hirschfelder: Transport properties of multi-component gas mixtures. J. chem. Phys., Lancaster Pa. **17**, 550—555 (1949).

Green, H. S.: A general kinetic theory of liquids. V. Liquid He II. Proc. R. Soc. London A **194**, 244—258 (1948).

Band, William and Lothar Meyer: Second sound and the heat conductivity in helium II. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **73**, 226—229 (1948).

Band, William and Lothar Meyer: The influence of relaxation on the two velocity field model of helium II. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **74**, 386—394 (1948).

Nowacki, Werner: Die Harker-Maxima der triklinen, monoklinen und orthorhombischen Raumgruppen. Schweiz. mineralog. petrograph. Mitt. **30**, 304—310 (1950).

In Fortsetzung einer vorhergehenden Arbeit (Nowacki, dies. Zbl. **37**, 430) werden die Maxima gleichwertiger Punkte einer Pattersonsynthese, die sog. Harker-Maxima, untersucht, indem die Differenzen der Vektorkomponenten gleichwertiger Punkte gebildet werden. Verf. stellt diese Maxima tabellarisch für die obigen Raumgruppen zusammen.

Johann Jacob Burckhardt.

Huang, Kun: Lattice theory of dielectric and piezoelectric constants in crystals. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **40**, 733—747 (1949).

Um die elektrischen und piezoelektrischen Konstanten von Kristallen aus der Gittertheorie zu berechnen, wurden von Born die langen akustischen Wellen des Gitters störungstheoretisch behandelt. Berücksichtigt man dabei die Coulombsche Wechselwirkung zwischen den Ionen, dann treten zunächst divergente Ausdrücke auf, welche von Born durch konvergente ersetzt wurden. Verf. geht einen etwas anderen Weg: er spaltet von dem Wechselwirkungspotential mittels einer von Ewald angegebenen θ -Funktions-Transformation ein Glied ab, welches sich als das makroskopische Zusatzfeld des polarisierten Kristalls herausstellt. Der verbleibende Rest ist die eigentliche rücktreibende Kraft des Gitters, für welche ein konvergenter Ausdruck erhalten wird. Verf. errechnet auf diese Weise die Wellengleichung des piezoelektrischen Kristalls, aus welcher die elektrischen und piezoelektrischen Konstanten des Materials sich entnehmen lassen.

W. Franz.

Jona, Franco: Elastizität von piezoelektrischen und seignetteelektrischen Kristallen. Helvetica phys. Acta **23**, 795—844 (1950).

Mit Hilfe der Ultraschall-Methode von Schäfer-Bergmann werden die elastischen Konstanten von piezo- und seignetteelektrischen Kristallen, sowie ihre Temperaturabhängigkeit im Intervall -50 bis $+40^\circ\text{C}$ bestimmt. Gemessen werden: Natriumchlorat, Seignettesalz, Kaliumphosphat (KD_2PO_4) und qualitativ Rubidiumphosphat. Die theoretischen Grundlagen der Ultraschall-Methode werden für die hier vorliegenden Fälle erweitert. Es zeigt sich, daß die gemessenen Werte die elastischen Konstanten für konstantes elektrisches Feld sind. *Günther Leibfried.*

Krishnan, K. S.: Anharmonicity of the lattice oscillations in the alkali halide crystals. Nature, London **166**, 114—115 (1950).

Verf. untersucht im Kristallgitter eines Alkalihalogenids vom NaCl-Typ die gegenseitigen Schwingungen des Alkaliionengitters und des Halogenionengitters zueinander insbesondere in Hinblick auf das Auftreten unharmonischer Schwingungen unter Zugrundelegung elektrostatischer Kräfte zwischen allen Ionen und eines zusätzlichen exponentiellen Abstoßungsgliedes nach M. Born und J. E. Mayer, jedoch nur zwischen den benachbarten Ionen. Für kleine Verschiebungen r der beiden ineinander gestellten Gitter werden (ohne Zwischenrechnung) die Koeffizienten a , b , c der ersten Glieder einer Potenzreihenentwicklung der Gitterenergie U nach r mitgeteilt mit $U = U_0 + ar^2 + br^4 + cr^4 (l^4 + m^4 + n^4)$, wo l , m , n die Richtungskosinusse der Verschiebung darstellen. Die in r quadratischen Glieder hängen, wie in dem Ansatz bereits zum Ausdruck gebracht wird, von diesen Richtungen nicht ab. Der Koeffizient von r^4 hat ein Maximum, $= b + c > 0$, in Richtung jeder der Koordinatenachsen und ein Minimum, $= b + c/3 < 0$, in der Richtung $(1, 1, 1)$. Als Maßstab für den durch höhere als quadratische (hier: biquadratische) Glieder erzeugten unharmonischen Charakter der Schwingung gibt Verf. an, daß in der $(1, 0, 0)$ -Richtung die Oktave (bis auf eine Abweichung von etwa 1%) doppelt so große Amplitude hat wie die Grundfrequenz der Eigenschwingung beider Gitter in einander.— Auch auf den Einfluß dieser Oberschwingungen auf die spezifische Wärme geht Verf. ein. Er nimmt an, daß jeder Abfall von c_v bei höheren Temperaturen auf unharmonische Wärmeschwingungen zurückzuführen ist.

Otto Emersleben.

Gol'danskij, V. I.: Zur Frage der elektrischen Doppelschicht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 845—848 (1948) [Russisch].

Es wird der Fall untersucht, daß bei der Adsorption vielatomiger Schichten an festen Grenzflächen in dem so gebildeten Oberflächenfilm auch Ionen eingelagert werden, die dort bei der Ausbildung einer elektrischen Doppelschicht mitwirken. An Hand der üblichen Beziehungen, nämlich der Boltzmannschen Dichteverteilung der Ionen im Feld und der Potentialgleichung, wird die entstehende Ladungs- und Feldverteilung untersucht und gezeigt, wie sich die dabei auftretenden Integrationskonstanten aus der Dicke, der Konzentration der Ionen und der elektrischen Leitfähigkeit dieser Schicht ermitteln lassen. Ein Vergleich der gefundenen Beziehungen über das Potential der Doppelschicht und dergl. mit entsprechenden experimentellen Ergebnissen wird nicht durchgeführt. *Fritz Sauter.*

Williams, H. J., W. Shockley and C. Kittel: Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 1090—1094 (1950).

Allard, G.: Théories du diamagnétisme. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 17 (Polarisation de la matière, Paris, April 1949), 102—108 (1949).

Kochler, J. S.: A calculation of the changes in the conductivity of metals produced by cold-work. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 106—117 (1949).

Kernphysik:

Schönberg, Mario: Elimination of divergences in the meson theory. I. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 748—760 (1948).

Die vom Verf. entwickelten Vorstellungen über die Wechselwirkung von Elementarteilchen (dies. Zbl. 39, 427) werden auf die Kopplung zwischen Nucleonen und pseudoskalaren Mesonen angewandt. *Harry Lehmann.*

Géhéniau, Jules: Solutions singulières de l'équation de Klein-Gordon tenant compte d'un champ magnétique extérieur. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 610—612 (1950).

Lipmanov, E. M.: Über die invarianten Vertauschungsbeziehungen und das Ausschließen von zusätzlichen Bedingungen in der Quantentheorie des Mesonenfeldes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 627—630 (1949) [Russisch].

Epstein, S. T., R. J. Finkelstein and J. R. Oppenheimer: Note on stimulated decay of negative mesons. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1140—1141 (1948).

Hückel, Erich: Zur Theorie der Streuung langsamer Neutronen an freien Protonen. Z. Naturforsch., Tübingen 3a, 134—142 (1948).

Yovanovitch (Jovanović), D. K.: Les propriétés virtuelles du noyau atomique expliquées par les propriétés colligatives de la matière. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 1, Nr. 3/4, 45—51 und französ. Zusammenfassg. 52 (1949) [Serbisch].

On peut considérer, par analogie avec les phénomènes macroscopiques, que les propriétés secondaires du noyau atomique, telles que radioactivité, isométrie etc., résultent de la propriété ondulatoire de la matière. Dans cet article, d'après les idées théoriques, on a discuté ce point de vue. *(Autoreferat.)*

Höcker, K. H. und E. Schopper: Zur auslösenden Komponente der Kernzertrümmerungen der Ultrastrahlung. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 6, 338—352 (1949).

Höcker, K. H.: Die Komponenten der kosmischen Strahlung und ihre Intensitäten in der Atmosphäre. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 6, 353—364 (1949).

Biermann, Ludwig und Erich Bagge: Über die Entstehung der solaren Komponente der Ultrastrahlung. Z. Naturforsch., Tübingen 4a, 303—315 (1949).

Bagge, Erich und Karl Fincke: Die Intensitätsverteilung der Höhenstrahlungsnutronen in der Atmosphäre. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 6, 321—337 (1949).

Eyges, L.: Scattering of particles in air showers. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 1801—1806 (1948).

Heitler, W. and L. Jánossy: On the absorption of meson-producing nucleons. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 374—385 (1949).

Bhabha, H. J. and S. K. Chakrabarty: Further calculations on the cascade theory. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 1352—1363 (1948).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Stumpff, Karl: Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1947, Nr. 1, 88 S. (1949).

Bei allen bisherigen Methoden der Ephemeridenrechnung muß man aus den beobachteten Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten eines Gestirns erst die 6 Bahnelemente ableiten. Erst über diesen Umweg kann dann die Ephemeridenrechnung ausgeführt werden. Im Zweikörperproblem ist aber die Bahn eines Himmelskörpers eindeutig bestimmt durch die Angaben der Koordinaten und der Geschwindigkeitskomponenten irgendeines Bahnpunktes. Der Vektor der Geschwindigkeit ist dabei invariant. Es muß somit möglich sein, ohne auf Bahnelemente überzugehen, jeden andern Ort einer Bahn zu bestimmen. — Dieses Ziel erreicht Verf. unter Benutzung der Vektorrechnung, indem er zunächst „lokale Invarianten“ einführt:

$$\mu = \frac{1}{r^3}, \quad \sigma = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^2}, \quad \omega = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{r^2}.$$

Unter Anwendung des Flächenansatzes und des Energiesatzes tritt dann schließlich an Stelle der bekannten Keplerschen Gleichung eine neue transzendente Gleichung 3. Grades von der Form: $z + c_2 \eta z^2 + c_3 \zeta z^3 = 1$, welche Verf. als „Hauptgleichung der Ephemeridenrechnung“ bezeichnet; für ihre Lösung hat er (dies. Zbl. 32, 382) Hilfstafeln gegeben. Diese Gleichung hat vor der Keplerschen Gleichung den großen Vorzug, daß sie stets reell ist und von der Bahnform unabhängig ist. Für alle Arten von Kegelschnitten ist also nur diese eine Gleichung erforderlich, während man früher 4 verschiedene Entwicklungen benötigte. — Im zweiten Teil der Arbeit wird diese Hauptgleichung der Ephemeridenrechnung für alle in Frage kommenden Fälle sehr ausführlich und gründlich diskutiert. Es ist erstaunlich, welche Fülle von neuen Erkenntnissen Verf. hieraus noch zu schöpfen vermag, obgleich es sich um das alte Zweikörperproblem handelt. Wer sich in die Methode einarbeitet, wird sie zur schnellen Ephemeridenrechnung alsbald gerne und mit Vorteil verwenden.

Karl Schütte.

Gurevič, L. E. und A. I. Lebedinskij: Das Gesetz der Planetenabstände und die Rotation der Planeten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 1061—1064 (1950) [Russisch].

• Whitrow, G. J.: The structure of the universe. An introduction to cosmology. (Hutchinson's University Library, Mathematical and Physical Sciences, Nr. 29.) London: Hutchinson and Co. 1949. 171 p. Geb. 7 s. 6 d.

Neun Kapitel behandeln fast ohne Verwendung von Formeln teils in historischer, teils in systematischer Darstellung die empirischen Grundlagen der modernen Kosmologie: I. „Die Tiefen des Universums (I)“ skizziert den Bau der Milchstraße; II. „Die Tiefen des Universums (II)“ schildert Verteilung und Bewegung der außergalaktischen Nebel; III. „Raum und Zeit“ referiert die historisch-philosophische Entwicklung der Begriffe bis 1905; IV. „Relativität“ berichtet über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie; V. „Weltmodelle (I)“ gibt die kosmologischen Ergebnisse auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie wieder, während VI. „Weltmodelle (II)“ den besonderen Vorstellungen Eddingtons und Milnes gewidmet ist. VII. „Das Alter des Universums“ stellt die Altersbestimmungen der Erdrinde, der Meteore, der Sterne und Sternsysteme dar und schließt: „Alles verfügbare Beweismaterial weist darauf hin, daß das Universum von einem Anfangszustand maximaler Dichte aus vor einigen Milliarden Jahren expandiert ist“. VIII. „Die Struktur der Nebel“ erzählt vom Aufbau und der Dynamik des einzelnen Spiralnebels. Den Abschluß bildet IX. „Kosmologie und das a priori“, das im wesentlichen erkenntnistheoretische Betrachtungen anstellt auf Grund der divergierenden Theorien Eddingtons und Milnes. — Als Anhang folgt eine ausgewählte Bibliographie und ein Index.

Otto Heckmann.

Gião, Antonio: Sur le mouvement général de la matière à échelle cosmologique. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 605—606 (1950).

A la suite de travaux antérieurs (ce Zbl. **35**, 268, **36**, 431), l'A. a été conduit à envisager un univers cosmologique voisin d'un univers de De Sitter et admettant un ds^2 de la forme:

$$ds^2 = (dx^4)^2 - P^2(x^i) \{ (dx^1)^2 + \sin^2 x^1 [(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2] \}$$

où P est voisin de la valeur de De Sitter en coordonnées de Lanczos $[R, c, h, (x^4/R)]$. Au moyen des équations classiques d'Einstein à constante cosmologique, il calcule la densité d'impulsion-énergie correspondante et s'intéresse particulièrement au vecteur-vitesse V qui fournit, dans ces hypothèses, le mouvement général de la matière à échelle cosmologique. Pour P voisin de la valeur citée, le mouvement envisagé est très généralement rotationnel. L'A. rapproche ce fait de la rotation des galaxies et compare les ordres de grandeur de $\text{rot } V$ et de la vitesse de rotation des galaxies, comparaison apparemment satisfaisante. *André Lichnerowicz.*

Mayer, Maria G. and Edward Teller: On the origin of elements. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1226—1231 (1949).

Die Häufigkeit der Elemente und Isotope deutet darauf hin, daß schwere und leichte Elemente durch verschiedene Prozesse erzeugt wurden. Der Ursprung schwerer Elemente wird im einzelnen erörtert unter der Hypothese, daß sie aus einer an Neutronen reichen Kernflüssigkeit durch einen Spaltungsprozeß gebildet worden seien. Mit einfachen Annahmen über diese Spaltung werden Isotopenhäufigkeiten berechnet für $62 \leq Z \leq 87$. Die Eigenschaften der neutronenreichen Flüssigkeit und des Spaltungsvorganges werden diskutiert. *Otto Heckmann.*

Drumaux, P.: La récession des nébuleuses extra-galactiques. VI. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Ser. **64**, 169—176 (1950).

(Teil I.—IV. s. dies. Zbl. **31**, 239).

Herleitung der durch die Nebelflucht hervorgerufenen Intensitätsänderung aus den Diracgleichungen. Übereinstimmung mit dem Resultat der Relativitätstheorie.

Otto Heckmann.

Johnson, M. H. and E. O. Hulburt: Diffusion in the ionosphere. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **79**, 802—807 (1950).

Die Frage, ob die Diffusion bei der Bildung der F -Schicht eine Rolle spielt, wurde bereits von anderen Seiten (Bagge, Seeliger) diskutiert, worauf die Verff. allerdings nicht eingehen. Sie versuchen, eine Antwort zu geben, ausgehend davon, daß ein Gas, durch das ein anderes diffundiert, auf dieses wie eine dissipative Kraft wirkt. Für ein (isothermes!) quasineutrales Gemisch von positiven und negativen Trägern, auf die ein elektrisches Feld und die Gravitation wirken, führt diese Auffassung zu den Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte pro Volumeneinheit $eDEn_+ + f_+ n_+ - \text{grad } p = kT/D_+ \cdot n_+ v_+$, $eEn_- + f_- n_- - \text{grad } p = kT/D_- \cdot n_- v_-$, wo n die Konzentrationen, f die Gravitationskräfte, v die Fortschrittsgeschwindigkeiten und p der Druck nkT ist; E ist die elektrische Feldkraft, die sich infolge der Diffusion einstellt. Letzten Endes handelt es sich dabei um dieselben Ansätze, die für die ambipolare Diffusion in einem Plasma benutzt werden (den Verff. scheint dies unbekannt zu sein), und neu ist im folgenden nur, was sich auf die Einstelldauer des ambipolar-quasineutralen Zustandes bezieht. Wenn noch ein Magnetfeld auf die Träger wirkt, kommt in dem ersten Glied der obigen Gleichungen jeweils noch ein Glied $env \times H/c$ hinzu, aber auch dann lassen sich die Verhältnisse noch übersehen. Eine zahlenmäßige Auswertung für die Ionosphäre wird in einer folgenden Arbeit in Aussicht gestellt. Mathematisch enthält die Arbeit nichts von besonderem Interesse.

Rudolf Seeliger.